Revistă de matematică editată de Catedra de matematică
a Colegiului Naţional "Gheorghe Şincai", Baia Mare

Materialele spre publicare se vor trimite pe adresa:
Colegiul Naţional "Gheorghe Şincai", str. Gh. Şincai 25, Baia Mare
sau pe adresa de mail: musuroianicolae@yahoo.com;
dana_heuberger@yahoo.com
cu menţiunea *pentru revista Argument*
Revista va putea fi citită pe adresa *www.sincai.multinet.ro*

ISSN 1582– 3660

Argument

Sumar

Pornind de la o problemă de concurs

Marin Bancoş

Abstract. This article generalizes an inequality presented at the "Grigore C. Moisil" inter-county contest. The method discussed here is used to solve and obtain other inequalities.

Una dintre problemele propuse de prof. univ. dr. Vasile Berinde, la ediţia a XX-a a Concursului Interjudeţean de Matematică "Grigore C. Moisil", Baia Mare, 11-13 martie 2005, are următorul enunţ:

Problema propusă

Fie numerele reale $x_1, x_2, ..., x_n > 0$ şi $n \in N$, $n \geq 2$. Să se arate că:

$$\frac{x_1^3}{x_1^2+x_2^2}+\frac{x_2^3}{x_2^2+x_3^2}+\cdots+\frac{x_n^3}{x_n^2+x_1^2} > \frac{1}{3}\,(x_1+x_2+\cdots+x_n).$$

Ne propunem pentru început să întărim această inegalitate.

O inegalitate întărită şi o demonstraţie simplă

Fie numerele reale $x_1, x_2, ..., x_n > 0$ şi $n \in N$, $n \geq 2$. Să se arate că:

$$\frac{x_1^3}{x_1^2+x_2^2}+\frac{x_2^3}{x_2^2+x_3^2}+\cdots+\frac{x_n^3}{x_n^2+x_1^2} \geq \frac{1}{2}\,(x_1+x_2+\cdots+x_n).$$

Demonstraţie. Arătăm pentru început că:

$$\frac{a^3}{a^2+b^2} \geq a-\frac{b}{2}, \quad (\forall)\, a, b > 0.$$

Metoda prin care se ajunge la această inegalitate este următoarea:

$$\frac{a^3}{a^2+b^2}=\frac{a(a^2+b^2)-ab^2}{a^2+b^2}=a-\frac{ab^2}{a^2+b^2} \overset{a^2+b^2\geq 2ab(>0)}{\geq} a-\frac{ab^2}{2ab}=a-\frac{b}{2}\,.$$

Obţinem aşadar inegalităţile:

$$\frac{x_1^3}{x_1^2+x_2^2} \geq x_1 - \frac{x_2}{2}$$
$$\frac{x_2^3}{x_2^2+x_3^2} \geq x_2 - \frac{x_3}{2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{x_n^3}{x_n^2+x_1^2} \geq x_n - \frac{x_1}{2}$$

care adunate conduc la inegalitatea din enunţ.
Egalitatea se obţine pentru: $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

În cele ce urmează vom generaliza această inegalitate, urmând un raţionament identic.

Generalizarea noii inegalităţi propuse

Fie numerele reale $x_1, x_2, ..., x_n > 0$ *şi* $n, k \in N,\ n, k \geq 2$. *Să se arate că:*

$$\frac{x_1^{k+1}}{x_1^k+(k-1)x_2^k}+\frac{x_2^{k+1}}{x_2^k+(k-1)x_3^k}+\cdots+\frac{x_n^{k+1}}{x_n^k+(k-1)x_1^k} \geq \frac{1}{k}\cdot(x_1+x_2+\cdots+x_n)$$

Demonstraţie. Arătăm pentru început că:

$$\frac{a^{k+1}}{a^k+(k-1)b^k} \geq a - \frac{k-1}{k}\cdot b,\ (\forall)\, a,\ b>0,\ k \in N,\ k \geq 2.$$

Avem:

$$\begin{aligned}\frac{a^{k+1}}{a^k+(k-1)b^k} &= \frac{a[a^k+(k-1)b^k]-(k-1)ab^k}{a^k+(k-1)b^k} \\ &= a - \frac{(k-1)ab^k}{a^k+(k-1)b^k} \overset{a^k+(k-1)b^k \geq kab^{k-1}}{\geq} a - \frac{(k-1)ab^k}{kab^{k-1}} \\ &= a - \frac{k-1}{k}\,b.\end{aligned}$$

Pentru a obţine relaţia: $a^k+(k-1)b^k \geq kab^{k-1}$, am aplicat inegalitatea dintre media aritmetică şi cea geometrică numerelor strict pozitive

$$a^k, \underbrace{b^k, b^k, ..., b^k}_{\text{de } (k-1) \text{ ori}},$$

de aici rezultând că

$$\frac{a^k+(k-1)b^k}{k}=\frac{a^k+\overbrace{b^k+b^k+\cdots+b^k}^{\text{de }(k-1)\text{ ori}}}{k}\geq\sqrt[k]{a^k\cdot\overbrace{b^k\cdot b^k\cdot\ldots\cdot b^k}^{\text{de }(k-1)\text{ ori}}}$$
$$=ab^{k-1}\Rightarrow a^k+(k-1)b^k\geq kab^{k-1}.$$

Obţinem aşadar inegalităţile:

$$\frac{x_1^{k+1}}{x_1^k+(k-1)x_2^k}\geq x_1-\frac{k-1}{k}\cdot x_2$$
$$\frac{x_2^{k+1}}{x_2^k+(k-1)x_3^k}\geq x_2-\frac{k-1}{k}\cdot x_3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{x_n^{k+1}}{x_n^k+(k-1)x_1^k}\geq x_n-\frac{k-1}{k}\cdot x_1$$

care adunate conduc la inegalitatea din enunţ. Egalitatea se obţine pentru: $x_1=x_2=\cdots=x_n$.

Metoda prezentată poate fi utilizată cu succes şi în cazul altor inegalităţi considerate ca având grad de dificultate ridicat. Vom exemplifica în cele ce urmează prin alte câteva probleme.

O problemă din Gazeta Matematică

Fie numerele reale $a_1,a_2,...,a_n>0$, *astfel încât:* $a_1+a_2+\cdots+a_n=1$. *Să se arate că:*

$$\frac{a_1^3}{a_1^2+a_1a_2+a_2^2}+\frac{a_2^3}{a_2^2+a_2a_3+a_3^2}+\cdots+\frac{a_n^3}{a_n^2+a_na_1+a_1^2}\geq\frac{1}{3}$$

(*Problema nr.* 23891, *G. M. nr.* 3/1998)

Demonstraţie. Să observăm că:

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}\overset{\left(\frac{a^2+b^2}{2}\geq ab>0\right)}{\geq}\frac{a^3}{a^2+\frac{a^2+b^2}{2}+b^2}=\frac{2}{3}\cdot\frac{a^3}{a^2+b^2}\overset{(*)}{\geq}\frac{2}{3}\cdot\left(a-\frac{b}{2}\right).$$

Am ţinut cont în (*) de inegalitatea demonstrată la prima problemă:

$$\frac{a^3}{a^2+b^2}\geq a-\frac{b}{2},\ (\forall)\,a,\ b>0.$$

Folosind acum această inegalitate, se obţin inegalităţile:

$$\frac{a_1^3}{a_1^2+a_1a_2+a_2^2} \geq \frac{2}{3}\cdot\left(a_1-\frac{a_2}{2}\right)$$
$$\frac{a_2^3}{a_2^2+a_2a_3+a_3^2} \geq \frac{2}{3}\cdot\left(a_2-\frac{a_3}{2}\right)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{a_n^3}{a_n^2+a_na_1+a_1^2} \geq \frac{2}{3}\cdot\left(a_n-\frac{a_1}{2}\right),$$

care adunate conduc la:

$$\frac{a_1^3}{a_1^2+a_1a_2+a_2^2}+\frac{a_2^3}{a_2^2+a_2a_3+a_3^2}+\cdots+\frac{a_n^3}{a_n^2+a_na_1+a_1^2} \geq \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{3}=\frac{1}{3},$$

adică inegalitatea din enunţ.

Egalitatea se obţine pentru $a_1=a_2=\cdots=a_n=\dfrac{1}{n}$.

Observaţie.

Soluţia dată acestei probleme, total diferită de cea prezentată de noi, a devenit extrem de cunoscută şi se bazează pe câteva observaţii esenţiale pentru a face posibilă rezolvarea.

Notând

$$A=\frac{a_1^3}{a_1^2+a_1a_2+a_2^2}+\frac{a_2^3}{a_2^2+a_2a_3+a_3^2}+\cdots+\frac{a_n^3}{a_n^2+a_na_1+a_1^2}$$
$$B=\frac{a_2^3}{a_1^2+a_1a_2+a_2^2}+\frac{a_3^3}{a_2^2+a_2a_3+a_3^2}+\cdots+\frac{a_1^3}{a_n^2+a_na_1+a_1^2},$$

se observă că: $A-B=0 \Leftrightarrow A=B$ (folosind identitatea $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$), şi de aici:

$$A=\frac{1}{2}(A+B)=\frac{1}{2}\left(\frac{a_1^3+a_2^3}{a_1^2+a_1a_2+a_2^2}+\frac{a_2^3+a_3^3}{a_2^2+a_2a_3+a_3^2}+\cdots+\frac{a_n^3+a_1^3}{a_n^2+a_na_1+a_1^2}\right)$$
$$\overset{a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)}{=}\frac{1}{2}\left[(a_1+a_2)\cdot\frac{a_1^2-a_1a_2+a_2^2}{a_1^2+a_1a_2+a_2^2}+(a_2+a_3)\cdot\frac{a_2^2-a_2a_3+a_3^2}{a_2^2+a_2a_3+a_3^2}\right.$$
$$\left.+\cdots+(a_n+a_1)\cdot\frac{a_n^2-a_na_1+a_1^2}{a_n^2+a_na_1+a_1^2}\right]$$

Folosind acum faptul că:

$$\frac{a^2-ab+b^2}{a^2+ab+b^2} \geq \frac{1}{3},\ (\forall)\, a,\ b \in R^*,$$

inegalitate care se reduce la $(a-b)^2 \geq 0$, se obţine apoi că

$$A \geq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{3} = \frac{1}{3},$$

adică inegalitatea de demonstrat.

Ţin să remarc faptul că această inegalitate aparţine de drept profesorului Gheorghe Andrei, şi a fost propusă în anul 1987, la un concurs de matematică ce s-a ţinut în tabăra de la Năvodari. Ea a fost prezentată în următoarea variantă:

Fie numerele reale $a_1, a_2, ..., a_n > 0$. Să se arate că

$$\frac{a_1^3}{a_1^2+a_1a_2+a_2^2} + \frac{a_2^3}{a_2^2+a_2a_3+a_3^2} + \cdots + \frac{a_n^3}{a_n^2+a_na_1+a_1^2} \geq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{3}.$$

O problemă de lot naţional

Fie $a, b, c > 0$, astfel încât $a+b+c=3$. Să se arate că

$$\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq \frac{3}{2}.$$

(*Problema propusă pentru selecţia lotului naţional, Bulgaria,* 2003)

Demonstraţie. Avem:

$$\frac{a}{1+b^2} = \frac{a(1+b^2)-ab^2}{1+b^2} = a - \frac{ab^2}{1+b^2} \overset{1+b^2 \geq 2b}{\geq} a - \frac{ab^2}{2b} = a - \frac{ab}{2}.$$

Similar se obţin relaţiile:

$$\frac{b}{1+c^2} \geq b - \frac{bc}{2}$$
$$\frac{c}{1+a^2} \geq c - \frac{ca}{2}.$$

Adunând membru cu membru cele trei relaţii obţinute vom avea

$$\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq a+b+c - \frac{ab+bc+ca}{2} \overset{a+b+c=3}{=} 3 - \frac{ab+bc+ca}{2}.$$

Deoarece

$$(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca) \overset{a+b+c=3}{\Rightarrow} 9 \geq 3(ab+bc+ca) \Leftrightarrow$$

$$3 \geq ab+bc+ca \Leftrightarrow 3 - \frac{ab+bc+ca}{2} \geq \frac{3}{2}.$$

Prin urmare, rezultă imediat că

$$\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq \frac{3}{2}.$$

Alte probleme propuse

Vă supun atenţiei, în cele ce urmează, câteva din problemele propuse de mine pe portalul MathLinks (http://www.artofproblemsolving.com), şi respectiv în cunoscuta publicaţie on-line Mathematical Reflections, a cărui iniţiator este prof. dr. Titu Andreescu. La baza demonstraţiei lor stă metoda prezentată.

1. *Fie* $x_1, x_2, ..., x_n, a, b > 0$. *Demonstraţi că*

$$\frac{x_1^3}{(ax_1+bx_2)(ax_2+bx_1)} + \frac{x_2^3}{(ax_2+bx_3)(ax_3+bx_2)} + \cdots + \frac{x_n^3}{(ax_n+bx_1)(ax_1+bx_n)} \geq \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{(a+b)^2}.$$

(*Marin Bancoş, Problema propusă S.*147, *Mathematical Reflections* 1/2010)

Demonstraţie. Pentru $x, y, a, b > 0$ avem:

$$(ax+by)(ay+bx) \overset{pq \leq \left(\frac{p+q}{2}\right)^2,\ (\forall) p,q \in R}{\leq} \left[\frac{(ax+by)+(ay+bx)}{2}\right]^2 = \frac{(a+b)^2(x+y)^2}{4} \overset{(x+y)^2 \leq 2(x^2+y^2)}{\leq} \frac{(a+b)^2(x^2+y^2)}{2}.$$

Folosind această inegalitate obţinem imediat că

$$\frac{x^3}{(ax+by)(ay+bx)} \geq \frac{2}{(a+b)^2} \cdot \frac{x^3}{x^2+y^2}.$$

Ţinând cont de inegalitatea stabilită în prima demonstraţie, prin metoda prezentată

$$\frac{x^3}{x^2+y^2} \geq x - \frac{y}{2},$$

obţinem că

$$\frac{x^3}{(ax+by)(ay+bx)} \geq \frac{2}{(a+b)^2} \cdot \left(x - \frac{y}{2}\right).$$

Folosind această inegalitate pentru fiecare din cei n termeni însumaţi în membrul stâng al inegalităţii de demonstrat, prin adunarea membru cu membru a celor n inegalităţi obţinute, se ajunge cu uşurinţă la rezultatul din enunţ.

2. *Fie* $x_1, x_2, ..., x_n > 0$. *Demonstraţi că*

$$\frac{x_1^5}{x_1^4+x_1^2x_2^2+4x_2^4}+\frac{x_2^5}{x_2^4+x_2^2x_3^2+4x_3^4}+\cdots+\frac{x_n^5}{x_n^4+x_n^2x_1^2+4x_1^4}\geq\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{6}.$$

(*Marin Bancoş, Mathlinks/Art of Problem Solving, Inequality MB*-36)

Demonstraţie. Pentru $x, y > 0$ avem:

$$\frac{x^5}{x^4+x^2y^2+4y^4}\overset{x^2y^2\leq\frac{x^4+y^4}{2}}{\geq}\frac{x^5}{x^4+\frac{x^4+y^4}{2}+4y^4}$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{x^5}{x^4+3y^4}=\frac{2}{3}\cdot\frac{x(x^4+3y^4)-3xy^4}{x^4+3y^4}$$

$$=\frac{2}{3}\left(x-\frac{3xy^4}{x^4+3y^4}\right)\overset{x^4+3y^4=x^4+y^4+y^4+y^4\geq4\sqrt[4]{x^4\cdot y^4\cdot y^4\cdot y^4}=4xy^3}{\geq}\frac{2}{3}\left(x-\frac{3xy^4}{4xy^3}\right)$$

$$=\frac{2}{3}\cdot(x-\frac{3}{4}y).$$

Aşadar

$$\frac{x^5}{x^4+x^2y^2+4y^4}\geq\frac{2}{3}\cdot(x-\frac{3}{4}y).$$

Folosind această inegalitate pentru fiecare din cei n termeni însumaţi în membrul stâng al inegalităţii de demonstrat, prin adunarea membru cu membru a celor n inegalităţi obţinute, se ajunge imediat la relaţia ce trebuia dovedită.

3. *Fie* $a_1, a_2, ..., a_n > 0$, *astfel încât:* $a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n = 1$. *Demonstraţi că:*

$$\frac{a_1^2}{a_2(a_1^2+a_1a_2+a_2^2)}+\frac{a_2^2}{a_3(a_2^2+a_2a_3+a_3^2)}+\cdots+\frac{a_n^2}{a_1(a_n^2+a_na_1+a_1^2)}\geq\frac{n}{3}$$

(*Marin Bancoş, Mathlinks/Art of Problem Solving, Inequality MB*-41)

Demonstraţie. Pentru $a, b > 0$ avem:

$$\frac{a^2}{b(a^2+ab+b^2)}\overset{ab\leq\frac{a^2+b^2}{2}}{\geq}\frac{a^2}{b\left(a^2+\frac{a^2+b^2}{2}+b^2\right)}=\frac{2a^2}{3b(a^2+b^2)}$$

$$=\frac{2}{3ab}\cdot\frac{a^3}{a^2+b^2}\overset{\frac{a^3}{a^2+b^2}\geq a-\frac{b}{2}}{\geq}\frac{2}{3ab}\left(a-\frac{b}{2}\right)=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{2a}\right).$$

Aşadar

$$\frac{a^2}{b(a^2+ab+b^2)}\geq\frac{2}{3}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{2a}\right).$$

Ţinând cont de această relaţie, aplicată fiecărui termen din primul membru, se obţine:

$$\frac{a_1^2}{a_2(a_1^2+a_1a_2+a_2^2)}+\frac{a_2^2}{a_3(a_2^2+a_2a_3+a_3^2)}+\cdots+\frac{a_n^2}{a_1(a_n^2+a_na_1+a_1^2)}$$
$$\geq\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)\overset{M\ aritmetica\geq M\ geometrica}{\geq}$$
$$\geq\frac{1}{3}\cdot n\cdot\sqrt[n]{\frac{1}{a_1}\cdot\frac{1}{a_2}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{a_n}}\overset{a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_n=1}{=}\frac{n}{3}$$

şi inegalitatea este demonstrată.

4. *Fie $a_1,a_2,...,a_n>0$ şi $n,k\in N$, $n,k\geq 1$, astfel încât: $a_1+a_2+\cdots+a_n=n$. Demonstraţi că:*

$$\frac{1-a_1^{k+1}}{1+ka_1^{k+1}}+\frac{1-a_2^{k+1}}{1+ka_2^{k+1}}+\cdots+\frac{1-a_n^{k+1}}{1+ka_n^{k+1}}\geq 0.$$

(*Marin Bancoş, Mathlinks/Art of Problem Solving, Inequality MB*-40)

Demonstraţie. Pentru $a>0$ şi $k\in\mathbb{N}$, $k\geq 1$ avem:

$$\frac{1-a^{k+1}}{1+ka^{k+1}}=\frac{1+ka^{k+1}-ka^{k+1}-a^{k+1}}{1+ka^{k+1}}$$
$$=1-\frac{(k+1)a^{k+1}}{1+ka^{k+1}}\overset{(*)}{\geq}1-\frac{(k+1)a^{k+1}}{(k+1)a^k}=1-a.$$

În $(*)$ am ţinut cont de faptul că din inegalitatea dintre media aritmetică şi cea geometrică rezultă

$$1+ka^{k+1}=1+\underbrace{a^{k+1}+a^{k+1}+\cdots+a^{k+1}}_{\text{de } k \text{ ori}}\geq(k+1)\sqrt[k+1]{1\cdot\overbrace{a^{k+1}\cdot a^{k+1}\cdot\ldots\cdot a^{k+1}}^{\text{de } k \text{ ori}}}$$
$$=(k+1)a^k.$$

Aşadar:

$$\frac{1-a_1^{k+1}}{1+ka_1^{k+1}}+\frac{1-a_2^{k+1}}{1+ka_2^{k+1}}+\cdots+\frac{1-a_n^{k+1}}{1+ka_n^{k+1}}\geq(1-a_1)+(1-a_2)+\cdots+(1-a_n)$$
$$=n-(a_1+a_2+\cdots+a_n)=n-n=0$$

şi inegalitatea este demonstrată.

5. *Fie $a_1, a_2, ..., a_n > 0$ şi $n, k \in N$, $n, k \geq 1$, astfel încât $a_1^k + a_2^k + \cdots + a_n^k = n$.*
Demonstraţi că

$$\frac{1}{a_1^{k+1} + k} + \frac{1}{a_2^{k+1} + k} + \cdots + \frac{1}{a_n^{k+1} + k} \geq \frac{n}{k+1}.$$

(*Marin Bancoş, Mathlinks/Art of Problem Solving, Inequality MB*-35)

Demonstraţie. Pentru $a > 0$ şi $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$ avem:

$$\frac{1}{a^{k+1} + k} = \frac{1}{k} \cdot \frac{k}{a^{k+1} + k} = \frac{1}{k} \cdot \frac{a^{k+1} + k - a^{k+1}}{a^{k+1} + k}$$

$$= \frac{1}{k} \cdot \left(1 - \frac{a^{k+1}}{a^{k+1} + k}\right) \overset{(*)}{\geq} \frac{1}{k} \cdot \left[1 - \frac{a^{k+1}}{(k+1)a}\right] = \frac{1}{k}\left(1 - \frac{a^k}{k+1}\right).$$

În $(*)$ am ţinut cont de faptul că din inegalitatea dintre media aritmetică şi cea geometrică rezultă

$$a^{k+1} + k = a^{k+1} + \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{\text{de } k \text{ ori}} \geq (k+1)\sqrt[k+1]{a^{k+1} \cdot \overbrace{1 \cdot 1 \cdot ... \cdot 1}^{de\ k\ ori}} = (k+1)a.$$

Aşadar:

$$\frac{1}{a_1^{k+1} + k} + \frac{1}{a_2^{k+1} + k} + \cdots + \frac{1}{a_n^{k+1} + k}$$

$$\geq \frac{1}{k}\left(1 - \frac{a_1^k}{k+1}\right) + \frac{1}{k}\left(1 - \frac{a_2^k}{k+1}\right) + \cdots + \frac{1}{k}\left(1 - \frac{a_n^k}{k+1}\right)$$

$$= \frac{1}{k}\left(n - \frac{a_1^k + a_2^k + \cdots + a_n^k}{k+1}\right) \overset{a_1^k + a_2^k + \cdots + a_n^k = n}{=} \frac{1}{k}\left(n - \frac{n}{k+1}\right) = \frac{n}{k+1},$$

şi inegalitatea este demonstrată.

Profesor asociat, Universitatea de Nord Baia Mare

Distanţa dintre două drepte

Constantin Bărăscu

Abstract. This article presents some problems which calculate the distances between two lines in space.

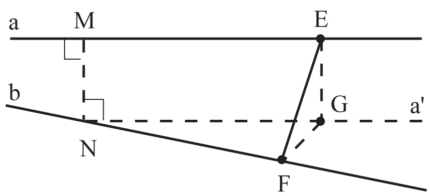
Fiind date două drepte oarecare a şi b în spaţiu şi două puncte $M \in a$ şi $N \in b$ astfel încât $MN \perp a$ şi $MN \perp b$, atunci dreapta MN este perpendiculara comună a dreptelor a şi b, iar lungimea segmentului $[MN]$ este distanţa de la dreapta a la dreapta b.

Teorema 1. *Dacă a şi b sunt drepte necoplanare, atunci există perpendiculara lor comună.*

Teorema 2. *Perpendiculara comună MN a dreptelor a şi b este unică.*

Teorema 3. *Dacă MN este perpendiculara comună a dreptelor a şi b, atunci pentru orice puncte $E \in a$ şi $F \in b$ avem: $EF \geq MN$.*

Demonstraţie.



Construim $a' \| a$ cu $N \in a'$.

Fie $EG \| MN$, $G \in a'$. Atunci $MNGE$ este dreptunghi. Din $EG \| MN$ şi $MN \perp b$ rezultă $EG \perp b$. Cum $EG \perp a'$, obţinem că $EG \perp (a', b)$, deci $EG \perp GF$. Atunci în triunghiul dreptunghic EGF: $EF > EG = MN$. În relaţia dată avem egalitate pentru $E = M$ şi $F = N$.

Consecinţă. Dacă a şi b sunt două drepte necoplanare, iar $E \in a$ şi $F \in b$ sunt două puncte mobile, atunci

$$\min EF = MN \Leftrightarrow d(a, b) = MN.$$

Această consecinţă furnizează o metodă utilă de calcul a distanţei MN dintre două drepte necoplanare, fără a determina efectiv poziţia punctelor M şi N pe aceste drepte. Aceasta constă în:

1) considerăm punctele mobile $E \in a$ şi $F \in b$;

2) calculăm lungimea segmentului EF ca diagonală a unui paralelipiped dreptunghic, care se obţine proiectând punctul E pe un plan ce conţine punctul F;

3) determinăm $\min EF$.

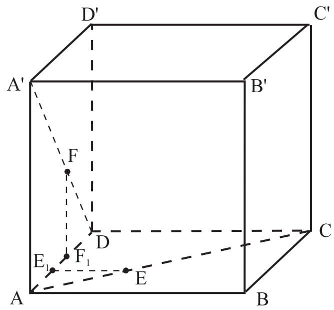
Pentru exemplificare, propunem următoarele probleme de calcul a distanţei dintre două drepte necoplanare.

1. Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$ de muchie a. Calculaţi distanţa dintre dreptele $A'D$ şi AC.

(*Concursul "M. Ţarină", Turda* 2002)

Soluţie.

Fie $E \in (AC)$, $F \in (A'D)$ cu $\dfrac{EA}{EC} = m$ şi $\dfrac{FA'}{FD} = n$. Construim $EE_1 \perp AD$, $FF_1 \perp AD$, $E_1 \in AD$, $F_1 \in AD$.



Atunci:

$$\frac{FF_1}{a} = \frac{1}{n+1}\,; \quad \frac{EE_1}{a} = \frac{m}{m+1} = \frac{AE_1}{a}\,; \quad \frac{AF_1}{a} = \frac{n}{n+1}\,;$$

$$\begin{aligned} EF^2 &= EE_1^2 + E_1F_1^2 + F_1F^2 = \left(\frac{am}{m+1}\right)^2 + |AE_1 - AF_1|^2 + \left(\frac{a}{n+1}\right)^2 \\ &= \frac{a^2m^2}{(m+1)^2} + \left(\frac{an}{n+1} - \frac{am}{m+1}\right)^2 + \frac{a^2}{(n+1)^2} \\ &= a^2\left[\frac{2m^2}{(m+1)^2} - 2\frac{m}{m+1}\cdot\frac{n}{n+1} + \frac{n^2+1}{(n+1)^2}\right] \\ &= a^2[2x^2 - 2x(1+y) + 2y^2 + 1], \end{aligned}$$

unde $x = \dfrac{1}{m+1}$, $y = \dfrac{1}{n+1}$.

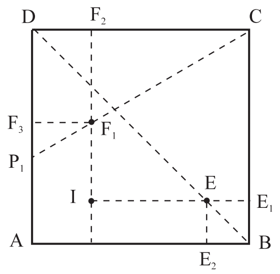
Deci

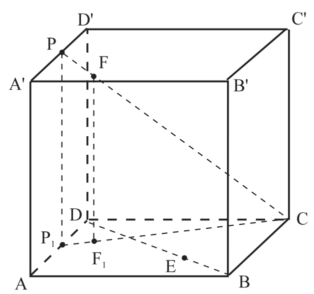
$$EF^2 = a^2 \left[\left(x\sqrt{2} - \frac{1+y}{\sqrt{2}} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(y\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 + \frac{1}{3} \right].$$

Obţinem $\min EF = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$ pentru $x = \dfrac{2}{3}$; $y = \dfrac{1}{3}$. Deci $d(A'D, AC) = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ pentru $m = \dfrac{1}{2}$ şi $n = 2$.

Observaţie. Evident, metoda de rezolvare permite şi construcţia perpendicularei comune a dreptelor $A'D$ şi AC.

2. *Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$ de muchie a şi punctul P mijlocul segmentului $[A'D']$. Calculaţi distanţa dintre dreptele CP şi BD.*





Soluţie. Fie $E \in (BD)$, $F \in (CP)$ astfel încât $\dfrac{EB}{ED} = m$ şi $\dfrac{FP}{FC} = n$. Considerăm $PP_1 \perp AD$, $P_1 \in AD$, $FF_1 \perp CP_1$, $F_1 \in (CP_1)$.

Fie $F_1F_2 \perp DC$, $F_2 \in DC$, $F_1F_3 \perp AD$, $F_3 \in AD$; $EE_1 \perp BC$, $E_1 \in BC$ şi $F_1F_2 \cap EE_1 = \{I\}$. Atunci $FE^2 = FF_1^2 + F_1I^2 + IE^2$.

Avem

$\dfrac{FF_1}{a} = \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{F_1C}{CP_1}$; $\dfrac{F_1F_3}{DC} = \dfrac{F_1P_1}{P_1C} = \dfrac{n}{n+1} \Rightarrow F_1F_3 = \dfrac{an}{n+1}$;

$\dfrac{F_1F_2}{DP_1} = \dfrac{F_1C}{CP_1} \Rightarrow F_1F_2 = \dfrac{a}{2(n+1)}$;

$\dfrac{EE_1}{CD} = \dfrac{BE}{BD} \Rightarrow EE_1 = \dfrac{am}{m+1} = EE_2$;

$F_1I = a - F_1F_2 - EE_2 = a - \dfrac{a}{2(n+1)} - \dfrac{am}{m+1} = a\Big(x - \dfrac{y}{2}\Big)$;

$IE = a - EE_1 - F_1F_3 = a - \dfrac{am}{m+1} - \dfrac{an}{n+1} = a(x+y-1)$, unde $x = \dfrac{1}{m+1}$, $y = \dfrac{1}{n+1}$.
Atunci:

$$\begin{aligned} EF^2 &= a^2\left[y^2 + \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + (x+y-1)^2\right] \\ &= a^2\left[2x^2 - x(2-y) + \frac{9y^2}{4} - 2y + 1\right] \\ &= a^2\left[\left(x\sqrt{2} - \frac{2-y}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{8}\left(y\sqrt{17} - \frac{6}{\sqrt{17}}\right)^2 + \frac{4}{17}\right]. \end{aligned}$$

Obţinem $\min EF = \dfrac{2a}{\sqrt{17}}$, deci $d(CP, BD) = \dfrac{2a}{\sqrt{17}}$ care se atinge pentru $x = \dfrac{7}{17}$ şi $y = \dfrac{6}{17}$ adică pentru $m = \dfrac{10}{7}$ şi $n = \dfrac{11}{6}$.

Asemănător se pot rezolva următoarele probleme:

3. *Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$ de muchie a. Calculaţi:*
a) distanţa dintre dreptele AC şi BD';
b) distanţa dintre diagonala BD' şi muchia AA'.

4. *Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$ de muchie a şi O' centrul feţei $A'B'C'D'$. Calculaţi distanţa dintre AO' şi BD.*

5. *Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$ de muchie a. Calculaţi distanţa dintre dreptele AC şi OD', unde O reprezintă centrul feţei $BCC'B'$.*

Bibliografie

[1] Dan Brânzei şi colectiv, *Matematica în concursurile şcolare*, 2002, clasele V-VIII, Ed. "Paralela 45"

[2] M. Pimsner şi S. Popa, *Probleme de geometrie elementară*, EDP, Bucureşti, 1979

Profesor, Şcoala nr. 5, Rm. Vâlcea

Aplicaţii ale numerelor complexe în probleme de numărare

Gheorghe Boroica

Abstract. This article presents several ways of using complex numbers in problems dealing with counting.

Numerele complexe au o gamă variată de aplicare în probleme de numărare, probleme de acoperire, probleme de teoria numerelor, etc. În acest articol sunt prezentate unele probleme de combinatorică, mai exact, probleme de numărare, probleme care au soluţii foarte elegante cu ajutorul numerelor complexe.

Lemă. *Dacă p este un număr prim şi $a_0, a_1, \ldots, a_{p-1} \in \mathbb{Q}$ satisfac relaţia:*

$$a_0 + a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + \cdots + a_{p-1}\varepsilon^{p-1} = 0,$$

unde $\varepsilon = \cos\dfrac{2\pi}{p} + i\sin\dfrac{2\pi}{p}$, *atunci* $a_0 = a_1 = \cdots = a_{p-1}$.

Demonstraţie. Polinoamele $f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_{p-1}X^{p-1}$ şi $g = 1 + X + X^2 + \cdots + X^{p-1}$ nu sunt prime între ele deoarece au rădăcina comună ε.

Cum polinomul g este ireductibil peste $\mathbb{Q}$, deducem că el trebuie să dividă pe f, lucru posibil dacă şi numai dacă $a_0 = a_1 = \cdots = a_{p-1}$.

Următoarea problemă a fost dată la Olimpiada Internaţională de Matematică din anul 1995. Menţionăm faptul că pentru eleganta soluţie de mai jos, concurentul Nikolai Nikolov a câştigat un premiu special.

1. *Fie $p > 2$ un număr prim şi mulţimea $A = \{1, 2, 3, \ldots, 2p\}$. Găsiţi numărul submulţimilor lui A, fiecare având câte p elemente şi suma elementelor divizibilă cu p.*

(*Marcin Kuczma, OIM,* 1995)

Soluţie. Considerăm numărul complex $\varepsilon = \cos\dfrac{2\pi}{p} + i\sin\dfrac{2\pi}{p}$ şi notăm cu a_k numărul submulţimilor $B \subset A$ cu proprietatea că $|B| = p$ şi $m(B) \equiv k (\operatorname{mod} p)$, unde $m(B)$ reprezintă suma elementelor mulţimii B. Atunci avem că

$$\sum_{k=0}^{p-1} a_k\varepsilon^k = \sum_{B\subset A, |B|=p} \varepsilon^{m(B)} = \sum_{1\le c_1<c_1<\cdots<c_p\le 2p} \varepsilon^{c_1+c_2+\cdots+c_p}.$$

Ultimul termen din relaţia anterioară reprezintă coeficientul lui X^p din polinomul

$$f=(X+\varepsilon)(X+\varepsilon^2)\dots(X+\varepsilon^{2p}).$$

Deoarece

$$X^p-1=(X-1)(X-\varepsilon)(X-\varepsilon^2)\dots(X-\varepsilon^{p-1}),$$

găsim imediat că $f=(X^p+1)^2$. Aşadar, coeficientul lui X^p din polinomul f este egal cu 2, deci $\sum\limits_{k=0}^{p-1}a_k\varepsilon^k=2$. Aplicând acum lema, obţinem că $a_0-2=a_1=\dots=a_{p-1}$. Deoarece sunt C_{2p}^p submulţimi cu p elemente, vom avea că $a_0+a_1+\dots+a_{p-1}=C_{2p}^p$, de unde găsim că

$$a_0=2+\frac{1}{p}\left(C_{2p}^p-2\right).$$

2. *Câte submulţimi ale mulţimii $A=\{1,2,3,\dots,5n\}$ există, astfel încât suma elementelor în fiecare submulţime este divizibilă cu 5?*

(*Test de baraj,* 2003)

Soluţie. Considerăm numărul complex $\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$ şi notăm cu a_k numărul submulţmilor $B\subset A$, cu proprietatea că $m(B)\equiv k(\bmod 5)$, unde $m(B)$ reprezintă suma elementelor mulţimii B. Atunci avem că

$$\sum_{k=0}^{4}a_k\varepsilon^k=\sum_{B\subset A}\varepsilon^{m(B)}=\sum_{k=0}^{5n}\left(\sum_{B\subset A,|B|=k}\varepsilon^{m(B)}\right)=\sum_{k=0}^{5n}x_k,$$

unde x_k este coeficientul lui X^{5n-k} din polinomul

$$f=(X+\varepsilon)(X+\varepsilon^2)\dots(X+\varepsilon^{5n})=(X^5+1)^n.$$

Aşadar, $\sum\limits_{k=0}^{4}a_k\varepsilon^k$ este suma coeficienţilor polinomului f, adică $f(1)=2^n$, de unde, folosind lema, deducem că $a_0-2^n=a_1=\dots=a_4$. Deoarece mulţimea A are 2^{5n} submulţimi, avem că $a_0+a_1+\dots+a_4=2^{5n}$, deci $5a_0-4\cdot2^n=2^{5n}$ sau $a_0=\dfrac{2^{5n}+4\cdot2^n}{5}$.

3. *Câte numere de n cifre, formate cu $1,9,8,6$ se divid cu 3?*

(*Dorel Miheţ, Concursul "Traian Lalescu",* 1985)

Soluţie. Fie $x_n^{(k)}$ numărul de numere de n cifre, scrise utilizând doar cifrele 1, 9, 8, 6 şi care sunt congruente cu k modulo 3. Avem

$$\sum_{k=0}^{2} x_n^{(k)} \cdot \varepsilon^k = \sum_{a_1,a_2,\ldots,a_n\in\{1,9,8,6\}} \varepsilon^{a_1+a_2+\cdots+a_n} = (\varepsilon+\varepsilon^9+\varepsilon^8+\varepsilon^6)^n$$
$$= (\varepsilon+1+\varepsilon^2+1)^n = 1^n = 1,$$

căci $\varepsilon = \cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}$.

Aşadar, $x_n^{(0)} + x_n^{(1)} \cdot \varepsilon + x_n^{(2)} \cdot \varepsilon^2 = 1$ şi utilizând lema, deducem că $x_n^{(0)} - 1 = x_n^{(1)} = x_n^{(2)}$. Deoarece există 4^n numere de n cifre formate cu cifrele 1, 9, 8, 6, avem

$$x_n^{(0)} + x_n^{(1)} + x_n^{(2)} = 4^n \Leftrightarrow 3x_n^{(0)} - 2 = 4^n \Leftrightarrow x_n^{(0)} = \frac{4^n+2}{3}.$$

Aşadar, există $\dfrac{4^n+2}{3}$ numere de tipul celor cerute.

Observaţie. Pentru o altă metodă, ce utilizează recurenţele, se poate vedea problema 232, pag. 121 din [1].

Probleme propuse

1. *Feţele unui zar sunt numerotate* $1,2,3,4,5,6$. *Aruncăm zarul de* n *ori. Care este probabilitatea ca suma cifrelor arătate de zar să fie un multiplu de* 5*?*

(*IMC,* 1999)

2. *Să se determine numărul de numere de* n *cifre, formate doar din cifrele* $1,3,4,6,7,9$ *şi care au suma cifrelor divizibilă cu* 7.

Bibliografie

[1] Adrian Dragomir, colectiv, *Exerciţii şi probleme de matematică pentru clasa a X-a, Ed. Bîrchi*

[2] Mihail Neacşu, *Enunţuri şi soluţii ale testelor concursului interjudeţean de matematică "Traian Lalescu"*, Ed. Timpul, Reşiţa

[3] http://www.mathlinks.ro, site pus la dispoziţie de către Valentin Vornicu

[4] O.I.M. 1995

Profesor, Colegiul Naţional "Gheorghe Şincai", Baia Mare

Câteva proprietăţi relative la seria armonică

Costel Chiteş

Abstract. The aim of this paper is to provide some results concerning classical series (harmonic series, depleted harmonic series, p-series and others) which are often used in mathematical competitions.

În anul 1650, matematicianul italian Pietro Mengoli (1626-1686) studiind seriile numerice al căror termen general tinde la zero, a rătat că seria armonică $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ este divergentă.

Procedeul utilizat de Mengoli este cel utilizat astăzi prin minorare. Dacă notăm cu $(S_n)_{n\geq 1}$ şirul sumelor parţiale, atunci:

$$\begin{aligned} S_{2^n} &= \left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^{n-1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right) \\ &\geq \frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{8}+\cdots+2^{n-1}\cdot\frac{1}{2^n}=\frac{n}{2}\to\infty, \end{aligned}$$

deci $S_{2^n}\to\infty$. Cum şirul $(S_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător, rezultă că $S_n\to\infty$, adică seria armonică este divergentă, având suma ∞.

Observaţie. O altă demonstraţie a divergenţei seriei se obţine prin utilizarea constantei C

$$C=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)=0,57\ldots\ .$$

Astfel vom obţine

$$S_n=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)+\ln n\to\infty.$$

În anul 1975, în lista scurtă a Olimpiadei Internaţionale de Matematică, a fost selectată următoarea problemă:

”Fie M mulţimea numerelor $n\in\mathbb{N}^*$ care nu conţin cifra 9 în scrierea lor în baza 10. Să se arate că seria $\sum\limits_{n\in M}\frac{1}{n}$ este convergentă”.

În acest articol ne propunem să generalizăm această problemă.

a) *Fie T mulţimea numerelor $n\in\mathbb{N}^*$ care nu conţin cifra $a\neq 0$ în scrierea lor în baza 10. Să se arate că seria $\sum\limits_{n\in T}\frac{1}{n}$ este convergentă.*

Soluţie. Orice număr n cu $k+1$ cifre verifică $10^k \le n < 10^{k+1}$. Numărul acestora este $8 \cdot 9^k$ (deoarece prima cifră poate fi alesă în 8 moduri şi celelalte cifre pot fi alese în 9 moduri) şi $\frac{1}{n} \le \frac{1}{10^k}$. Rezultă că $\sum\limits_{n\in T} \frac{1}{n} \le 8 \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^k$. Cum seria geometrică de raţie subunitară este convergentă, rezultă, prin utilizarea criteriului de comparaţie, că seria dată este convergentă.

b) *Fie S mulţimea numerelor $n \in \mathbb{N}^*$ care nu conţin cifra $a \neq 0$ în scrierea lor în baza $b \ge 3$, sau nu conţin cifra 0 în scrierea în baza 2. Să se arate că seria $\sum\limits_{n\in S} \frac{1}{n}$ este convergentă.*

Soluţie. Cazul 1. În baza $b \ge 3$, orice număr de $k+1$ cifre verifică $b^k \le n < b^{k+1}$. Numărul acestora este $(b-2)(b-1)^k$ (deoarece prima cifră poate fi aleasă în $b-2$ moduri şi celelalte cifre pot fi alese în $b-1$ moduri) şi $\frac{1}{n} \le \frac{1}{b^k}$. Atunci $\sum\limits_{n\in S} \frac{1}{n} \le (b-2) \sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\frac{b-1}{b}\right)^k$. Cum seria geometrică de raţei subunitară este convergentă, rezultă, prin utilizarea criteriului de comparaţie, că seria dată este convergentă.

Cazul 2. În baza $b = 2$, $\sum\limits_{n\in S} \frac{1}{n} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 2$.

În încheiere, vom prezenta câteva probleme legate de seria armonică.

3. *Să se arate că mulţimea sumelor parţiale neordonate ale seriei armonice $\sum\limits_{n\ge 1} \frac{1}{n}$ coincide cu mulţimea numerelor raţionale pozitive.*

(*The W. L. Putnam Math. Competition*)

Soluţie. Fie $r \in \mathbb{Q}_+^*$. Notăm $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, $\forall\, n \ge 1$, $S_0 = 0$. Cum seria este divergentă $\exists\,!\, n_0 \ge 1$, $S_{n_0} < r \le S_{n_0+1}$. Dacă $r = S_{n_0+1}$ demonstraţia se încheie. Dacă $r < S_{n_0+1} = S_{n_0} + \frac{1}{n_0+1}$, atunci definim $0 < r_1 - S_{n_0} < \frac{1}{n_0+1}$. Atunci există şi este unic $n_1 > n_0$ pentru care $\frac{1}{n_1+1} \le r_1 < \frac{1}{n_1}$.

Dacă $r_1 = \dfrac{1}{n_1+1} \Rightarrow r = S_{n_0} + \dfrac{1}{n_1+1}$. Dacă $r_1 > \dfrac{1}{n_1+1}$, atunci definim $r_2 = r_1 - \dfrac{1}{n_1+1}$. Deci $\exists!\, n_2 \geq 1$ pentru care $\dfrac{1}{n_2+1} \leq r_2 < \dfrac{1}{n_2}$.

Din inegalităţile $0 < r_2 = r_1 - \dfrac{1}{n_1+1} < \dfrac{1}{n_1} - \dfrac{1}{n_1+1}$ şi $\dfrac{1}{n_2+1} \leq r_2 < \dfrac{1}{n_2} \Rightarrow n_2 > n_1$. După un număr finit de paşi se obţine reprezentarea căutată. Aceasta se explică astfel:

$$\frac{1}{m+1} < \frac{p}{q} < \frac{1}{m} \Rightarrow \frac{p}{q} - \frac{1}{m+1} = \frac{pm-q+p}{q(m+1)}\,, mp-q<0,$$

deci şirul numărătorilor fracţiilor $r, r_1, r_2, \ldots$ este strict descrescător.

Remarcă istorică. Atât în papirusul de la Londra cât şi cel de la Moscova, egiptenii utilizau descompunerile unei fracţii în sume de fracţii alicvote, adică de forma $\dfrac{1}{n}$. (De exemplu $\dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6}$; $\dfrac{2}{101} = \dfrac{1}{101} + \dfrac{1}{202} + \dfrac{1}{303} + \dfrac{1}{606}$).

Egiptenii au creat tabele de descompunere a fracţiilor de forma $\dfrac{2}{n}$, $3 \leq n \leq 101$, $n =$ impar în sume de fracţii alicvote.

4. *Să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ are loc inegalitatea*

$$2^{\frac{1}{2}} \cdot 4^{\frac{1}{4}} \ldots (2^n)^{\frac{1}{2^n}} < 4.$$

(*propusă la Olimpiada Naţională, Irlanda,* 1996)

Soluţie. Este suficient de a arăta că $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{2^n} = 2$. Notăm $q = \dfrac{1}{2}$ şi considerăm şirul sumelor parţiale $(S_n)_{n\geq 1}$ al seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \cdot q^n$. Calculând $S_n - q \cdot S_n = (q + q^2 + \cdots + q^n) - n \cdot q^{n+1}$, se obţine că $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 2$, de unde concluzia.

5. *Se consideră şirul real $(a_n)_{n\geq 2}$ definit astfel: dacă $p_1, p_2, \ldots, p_k$ sunt toţi divizorii primi distincţi ai lui n, atunci $a_n = p_1^{-1} + p_2^{-1} + \cdots + p_k^{-1}$. Să se arate că pentru orice număr natural $N \geq 2$, $\sum\limits_{n=2}^{N} a_2 a_3 \ldots a_n < 1$.*

(*propusă la Olimpiada Naţională, România,* 1996)

Soluţie.

$$\sum_{n=2}^{N} a_n = \sum_{n=2}^{N} \left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_k} \right) = \sum_{p \leq N} \frac{1}{p} \left[\frac{n}{p} \right].$$

Avem inegalităţile

$$\sum_{p\le N}\frac{1}{p}\left[\frac{1}{p}\right] \le \sum_{p\le N}\frac{n}{p^2} < n\left(\frac{1}{4}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\right) < \frac{n}{4}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}\right) < \frac{n}{2}.$$

Utilizând inegalitatea mediilor, obţinem că

$$a_2a_3\dots a_n < \left(\frac{a_2+a_3+\dots+a_n}{n-1}\right)^{n-1} < \frac{1}{2^{n-1}}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} < \frac{e}{2^{n-1}} < \frac{3}{2^{n-1}}.$$

Deci, vom obţine

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_2a_3\dots a_n < \frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{60}+3\left(\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^6}+\dots\right)$$
$$=\frac{46}{60}+\frac{3}{2^5}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots\right)=\frac{46}{60}+\frac{6}{32}<1.$$

6. *Să se stabilească în modalităţi distincte convergenţa următoarelor serii:*

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$, $\alpha>0$; *b)* $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^{\alpha} n}$, $\alpha>0$.

Soluţie.

Metoda 1. a) Notăm $u_n=\frac{1}{n^{\alpha}}$. Cum $u_n \searrow 0$, prin aplicarea criteriului de condensare al lui Cauchy, rezultă că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ are aceeaşi natură cu seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\frac{1}{(2^n)^{\alpha}}$. Ultima serie este seria geoemtrică $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^n$ ce este convergentă dacă şi numai dacă $\frac{1}{2^{\alpha-1}}<1$ sau $\alpha>1$.

Notă istorică. Criteriul de condensare al lui Cauchy a fost publicat de acesta în "Cours d'analyse de l'école polytechnique", Part. 1, Analyse algébrique, Paris, 1821, pg. 135.

Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ are aceeaşi natură cu integrala $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^{\alpha}}dx$ şi care este convergentă dacă şi numai dacă $\alpha>1$.

b) Notăm $v_n=\frac{1}{n(\ln n)^{\alpha}}$. Cum $v_n \searrow 0$, prin aplicarea criteriului de condensare al lui Cauchy, rezultă că seria $\sum\limits_{n=2}^{\infty}v_n$ are aceeaşi natură cu seria $\sum\limits_{n=2}^{\infty}2^n\cdot v_{2^n}$.

Cum seria $\sum\limits_{n=2}^{\infty} 2^n \cdot v_{2^n} = \dfrac{1}{(\ln 2)^\alpha} \cdot \sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$, rezultă conform punctului a) că ea este convergentă dacă şi numai dacă $\alpha > 1$.

Metoda 2. Cum $v_n \searrow 0$, seria $\sum\limits_{n=2}^{\infty} v_n$ are aceeaşi natură cu integrala $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{x(\ln x)^\alpha}\,dx$, care este convergentă dacă şi numai dacă $\alpha > 1$.

Notă istorică. Divergenţa seriei din exemplul b), pentru $\alpha = 1$, adică a seriei $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n \ln n}$ a fost evidenţiată pentru prima dată de matematicianul norvegian Niels Henrik Abel (1802-1829).

Observaţie. Acest ultim rezultat a fost propus la examenul de bacalaureat, pentru elevii olimpici în anul 1984.

Vom prezenta şi soluţia standard.

Fie şirul sumelor parţiale $(S_n)_{n\geq 1}$, unde $S_n = \sum\limits_{k=2}^{\infty} \dfrac{1}{k \ln k}$. Vom arăta că $S_n \to \infty$. Definim funcţia $f : [2, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x \ln x}$, $\forall\, x \geq 2$. Fiind funcţie elementară este derivabilă, deci putem aplica teorema lui Lagrange pe intervalul $[k, k+1]$, $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$. Există $c_k \in (k, k+1)$, $\ln(\ln(k+1)) - \ln(\ln k) = \dfrac{1}{c_k \ln c_k}$. Cum $k < c_k < k+1 \Rightarrow \dfrac{1}{(k+1)\ln(k+1)} < \ln(\ln(k+1)) - \ln(\ln k) < \dfrac{1}{k \ln k}$. Prin însumare în a doua inegalitate, obţinem $S_n > \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln 2) \to \infty$, deci $S_n \to \infty$, adică seria $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n \ln n}$ este divergentă, având suma ∞.

7. *Fie şirul descrescător $(a_n)_{n\geq 1}$ cu $a_n > 0$, $\forall\, n \geq 1$.*

a) Dacă seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, atunci $a_n \xrightarrow{n} 0$ şi $n \cdot a_n \xrightarrow{n} 0$.

b) Reciproca este adevărată?

Soluţie. a) Fie $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, $\forall\, n \geq 1$. Şirul $(S_n)_{n\geq 1}$ al sumelor parţiale fiind convergent, rezultă că $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, m \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\forall\, r > m$, $\forall\, \lambda \geq 1$ avem $|S_{r+\lambda} - S_r| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ sau echivalent

$$a_{r+1} + a_{r+2} + \cdots + a_{r+\lambda} < \frac{\varepsilon}{2}$$

(am utilizat criteriul lui Cauchy pentru şiruri).

Alegem $n > 2m$ şi atunci, pentru $r = \left[\frac{n}{2}\right]$, vom avea $r \geq m$ şi $a_{r+1} + a_{r+2} + \cdots + a_n < \frac{\varepsilon}{2}$. De aici, utilizând monotonia şirului $(a_n)_{n\geq 1}$ rezultă $(n-r)a_n < \frac{\varepsilon}{2}$. Deci $\frac{n}{2}a_n < \frac{\varepsilon}{2}$, adică $n \cdot a_n < \varepsilon$, $\forall\, n > 2m$. Deci $n \cdot a_n \xrightarrow{n} 0$. Evident că $a_n = S_n - S_{n-1} \xrightarrow{n} 0$.

b) Reciproca este falsă. Iată un contraexemplu $a_n = \frac{1}{n \ln n}$, $\forall\, n \geq 1$.

Notă istorică. Afirmaţia a) din exemplul 5 a fost dată în anul 1827 de către Olivier L.

Bibliografie

[1] C. Chiteş, Petriceanu D. şi Vernescu A., *Manual pentru clasa a XI-a*, Ed. GIL, 2006

[2] Şt. Frunză, *Lecţii de analiză matematică*, Ed. Universităţii "Al. I. Cuza", Iaşi, 2004

[3] K. Knopp, *Theory and application of infinite series*, translated from the Second German Edition, Dover Publications, New York, 1989

[4] E. Kolman, *Istoria matematicii în antichitate*, traducere din limba rusă, Ed. Ştiinţifică, Bucureşti, 1963

[5] N. Mihăileanu, *Istoria matematicii*, Vol. II, Ed. Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1981

[6] Gh. Siteţchi, *Analiză matematică*, Vol. II, *Exerciţii avansate de calcul diferenţial şi integral real*, Univ. Bucureşti, 1977

Profesor dr., Colegiul Naţional de Informatică "T. Vianu", Bucureşti

Sisteme maximale de elemente ale unor grupuri finite

Dana Heuberger

Abstract. The purpose of this paper is to find $k \in \mathbb{N}$ maximal such as if for any subset with k elements of a finite group, at least two of its elements have the same propriety, then the whole group has the same propriety.

În acest articol ne propunem să găsim $k \in \mathbb{N}$ cât mai mare, astfel încât dacă oricum am alege o submulţime cu k elemente a unui grup finit, aceasta are cel puţin două elemente cu o aceeaşi proprietate, atunci întregul grup să aibă proprietatea respectivă.

În revista de matematică "Argument" [3] apărea următoarea problemă:

Problema 1. (D. Heuberger) *Fie $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 3$ şi $(G, \cdot)$ un grup comutativ care nu are elemente de ordinul 4 şi astfel încât printre oricare $2^k - 1$ elemente distincte ale sale există cel puţin $2^{k-1} - 2$ elemente de ordin mai mic sau egal cu doi. Să se arate că orice element al grupului are ordinul cel mult doi.*

Să observăm mai întâi că este esenţial să ştim de la început că grupul nu are elemente de ordinul 4. Într-adevăr, fie grupul

$$G = \left\{e, x, x^2, x^3, y, xy, x^2y, x^3y\right\}$$

cu $ord\,(x) = 4$, $ord\,(y) = 2$ şi $xy = yx$.

În lucrarea [1] se arată că acest grup este izomorf cu $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$.

Alegând $k = 3$, cum $ord\,(y) = 2 = ord\left(x^2\right) = ord\left(x^2y\right)$, orice 7 elemente am alege, există cel puţin două dintre ele de ordin ≤ 2, deci grupul verifică condiţia din ipoteză, dar nu şi concluzia problemei, căci el are elemente de ordinul 4.

Ne punem întrebarea dacă am putea optimiza enunţul, pentru grupuri finite. Vom determina valoarea maximă a numărului $k \in \mathbb{N}$ pentru care dacă oricum am alege k elemente ale grupului, găsim printre acestea cel puţin două elemente de ordin mai mic sau egal cu doi, atunci să rezulte că toate elementele grupului au ordinul cel mult doi.

Propoziţia 1. (D. Heuberger) *Se consideră grupul comutativ $(G, \cdot)$ cu n elemente, unde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$. Dacă oricare ar fi $k = \left[\dfrac{2n+2}{3}\right] + 1$ elemente ale* *sale, există printre acestea două elemente de ordin ≤ 2 şi G nu are elemente de ordinul 4, atunci toate elementele lui G au ordinul ≤ 2.*

Demonstraţie. Pentru $n \in \{4,5\}$ enunţul este evident. Considerăm $n \geq 6$. Presupunem că mulţimea M a elementelor de ordin > 2 ale grupului este nevidă. Observăm că mulţimea M are cel mult $k-2$ elemente. Într-adevăr, presupunem că mulţimea M ar conţine cel puţin $k-1$ elemente. Adăugând elementul neutru la $k-1$ elemente ale lui M, obţinem k elemente ale grupului, printre care, din ipoteză, găsim două de ordin ≤ 2. Aşadar mulţimea M conţine cel puţin un element de ordin ≤ 2, fals. Deducem că mulţimea $G \backslash M$ are cel puţin $n-k+2$ elemente.

Fie $a_1, a_2, \ldots, a_{n-k+2} \in G \backslash M$ şi fie $x \in G$, unul dintre cele $k-2$ elemente ale grupului cărora nu le cunoaştem ordinul. Atunci $ord\,(x) \geq 3$. Deoarece $ord\,(x) \neq 4$, obţinem că $ord\left(x^2\right) \geq 3$. Deoarece grupul e comutativ, elementele $x \cdot a_i,\ x^2 \cdot a_i \in G$, cu $i \in \{1, 2, \ldots, n-k+2\}$ sunt de ordin ≥ 3, distincte două câte două, în număr de $2\,(n-k+2)$. Dar $k = \left[\dfrac{2n+2}{3}\right] + 1 \leq \dfrac{2n+2}{3} + 1$, deci $2\,(n-k+2) \geq k-1$, ceea ce înseamnă că există cel puţin $k-1$ elemente ale grupului care au ordinul > 2, contradicţie. Rezultă că toate elementele grupului au ordinul ≤ 2. $\square$

Observaţia 1. (a) Pentru $n = 3 \cdot 2^t$, cu $t \in \mathbb{N}^*$ şi $k = \left[\dfrac{2n+2}{3}\right] + 2 = 2^{t+1} + 2$, grupul comutativ $G = \left\{e, a_1, ..., a_{2^t-1}, x, a_1 x, \ldots, a_{2^t-1} x, x^2, a_1 x^2, \ldots, a_{2^t-1} x^2\right\}$, unde $ord\,(a_k) = 2$, $k \in \left\{1, \ldots, 2^t - 1\right\}$ şi $ord\,(x) = 3$, are 2^{t+1} elemente de ordin > 2 şi îndeplineşte condiţiile din ipoteză, fără să aibă toate elementele de ordin ≤ 2.

(b) Proprietatea precedentă optimizează propoziţiile 4.3.4. şi 4.3.5 de la pagina 46 din lucrarea [4].

Ne punem întrebarea cum am putea reformula enunţul astfel încât, dacă pentru k cât mai mare, alegând oricare k elemente ale grupului am găsi printre acestea cel puţin două elemente din centrul grupului, să rezulte (folosind acelaşi tip de raţionament) că grupul este comutativ.

Vom demonstra mai întâi

Lema 1. *Dacă grupul necomutativ $(G, \cdot)$ are n elemente, unde $n \in \mathbb{N}^*$, atunci*

$$ord\,(Z\,(G)) < \frac{n}{2}.$$

Demonstraţie. Pentru n impar este evident, folosind teorema lui Lagrange. Pentru $n = 2t$, cu $t \in \mathbb{N}^*$, presupunem că $ord\,(Z\,(G)) = t$. Fie $x \in G \backslash Z\,(G)$.

Atunci, $\{x\} \cup Z(G) \subseteq c(x)$ şi din teorema lui Lagrange deducem că centralizatorul $c(x)$ al lui x coincide cu G, deci că $x \in Z(G)$, fals. $\square$

Propoziţia 2. (D. Heuberger) *Se consideră grupul* $(G,\cdot)$ *cu* n *elemente, unde* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 5$. *Dacă oricare ar fi* $k = \left[\frac{n}{2}\right] + 3$ *elemente ale sale, există printre acestea două elemente din* $Z(G)$, *atunci grupul este comutativ.*

Demonstraţie. Ştim că grupurile de ordinul 5 sunt comutative, iar cele de ordinul 6 sunt sau izomorfe cu $\mathbb{Z}_6$, deci sunt abeliene, sau cu σ_3, deci nu verifică ipoteza, deoarece centrul acestora se reduce la elementul neutru. Aşadar putem considera $n \geq 7$. Fie $M = G \backslash Z(G)$. Presupunem că $M \neq \emptyset$. Observăm că mulţimea M are cel mult $k-2$ elemente. Într-adevăr, presupunem că mulţimea M ar conţine cel puţin $k-1$ elemente. Adăugând elementul neutru la $k-1$ elemente ale lui M, obţinem k elemente ale grupului, printre care, din ipoteză, găsim două din $Z(G)$. Aşadar mulţimea M conţine cel puţin un element din $Z(G)$, fals. Deducem că mulţimea $Z(G)$ are cel puţin $n-k+2$ elemente. Dar $k = \left[\frac{n}{2}\right] + 3 \leq \frac{n}{2} + 3$, deci în $Z(G)$ avem cel puţin $n-k+2 \geq \frac{n}{2} - 1$ elemente. Din Lema 1 deducem că

$$\frac{n}{2} > |Z(G)| \geq n-k+2 \geq \frac{n}{2} - 1 \tag{1}$$

Dacă $n = 2t$, din relaţia (1) deducem $|Z(G)| = t - 1/2t$, deci $t \in \{2,3\}$, adică $n \in \{4,6\}$, fals.

Pentru $n = 2t+1$, din relaţia (1) obţinem $|Z(G)| = t/(2t+1)$, fals.

Aşadar $Z(G) = G$, deci grupul este comutativ. $\square$

Observaţia 2. (a) Să observăm că pentru $n = 8$ şi $k = \left[\frac{n}{2}\right] + 4 = 8$, grupul cuaternionilor $H = \{1,-1,i,-i,j,-j,m,-m\}$, cu $i^2 = j^2 = m^2 = -1$ şi $ij = -ji = m$, $jm = -mj = i$ şi $mi = -im = j$ verifică ipoteza, deoarece $Z(H) = \{-1,1\}$, dar nu şi concluzia Propoziţiei 2, deoarece nu este comutativ.

(b) Proprietatea precedentă optimizează propoziţia 4.3.6. de la pagina 47 din lucrarea [4].

Ne punem acum întrebarea ce gen de proprietate am putea obţine înlocuind în enunţul anterior subgrupul $Z(G)$ cu o reuniune a două subgrupuri ale grupului G. Iată o posibilă formulare:

Propoziţia 3. (D. Heuberger) *Se consideră* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$ *şi grupul* $(G,\cdot)$ *cu* n *elemente, având elementul neutru* e.

Fie subgrupurile H_1 *şi* H_2 *ale lui* G *astfel încât* $H_1 \cap H_2 = \{e\}$. *Dacă oricum am alege* $k = \left[\frac{n+1}{2}\right]$ *elemente din* G, *cel puţin două dintre ele sunt în* $H_1 \cup H_2$, *să se demonstreze că* $H_1 = G$ *sau* $H_2 = G$.

Demonstraţie. Presupunem contrariul, deci că $H_1 \neq G$ şi $H_2 \neq G$.
În $H_1 \cup H_2$ sunt cel puţin $n-(k-2)$ elemente. Într-adevăr, presupunem că în $K = G\setminus(H_1 \cup H_2)$ am avea cel puţin $k-1$ elemente. Adăugând la $k-1$ dintre elementele lui K un element h din $H_1 \cup H_2$ obţinem că în $K \cup \{h\}$ sunt cel puţin două elemente din $H_1 \cup H_2$, adică cel puţin unul dintre elementele lui K este în $H_1 \cup H_2$, contradicţie. Aşadar

$$|H_1 \cup H_2| \geq n-k+2 \tag{2}$$

Notăm $|H_1| = a$ şi $|H_2| = b$. Din relaţia (2) deducem $a+b-1 \geq n-k+2$. Deoarece $k \leq \frac{n+1}{2}$, adică $n \geq 2k-1$, rezultă

$$a+b \geq n-k+3 \geq k+2. \tag{3}$$

Cum $a \leq k$, din relaţia (3) rezultă că $b \geq 2$. Obţinem că $a, b \in [2,k] \cap \mathbb{N}$.
Tot din inegalităţile (3) rezultă

$$k \leq a+b-2. \tag{4}$$

Cum $H_1 \cap H_2 = \{e\}$, avem că $H_1^* H_2^* \subset G\setminus(H_1 \cup H_2)$ şi $|H_1^* H_2^*| = (a-1)(b-1)$. Folosind (4), deducem $(a-1)(b-1) \leq k-2 \leq a+b-4$, deci $ab-2(a+b)+5 \leq 0$, adică $(a-2)(b-2)+1 \leq 0$, fals, deoarece $a \geq 2$ şi $b \geq 2$.

Aşadar $H_1 = G$ sau $H_2 = G$. □

Observaţia 3. (a) Enunţul Propoziţiei 3 nu poate fi îmbunătăţit, dacă H_1 şi H_2 sunt subgrupuri nenule.

Într-adevăr, dacă $n = 2k$, considerăm grupul comutativ

$$G = \left\{e, g, \ldots, g^{k-1}, x, gx, \ldots, g^{k-1}x\right\}$$

cu $ord\,(g) = k$ şi $ord\,(x) = 2$. Oricum am alege $k+1 = \left[\frac{n+1}{2}\right]+1$ elemente ale sale, printre ele se găsesc cel puţin două din $H_1 \cup H_2$, unde $H_1 = <g>$ şi $H_2 = <x>$, fără ca aceste subgrupuri să fie improprii.

Dacă $n = 2k-1$, cu $k \geq 3$, presupunem că oricum am alege $k+1 = \left[\frac{n+1}{2}\right]+1$ elemente ale grupului G, cel puţin două dintre ele sunt în $H_1 \cup H_2$, unde H_1

şi H_2 sunt subgrupuri ale sale, ca în enunţ. Ca în demonstraţia Proprietăţii 3, deducem $a + b - 1 \geq n - k + 1$, deci $a + b \geq k + 1$. Apoi,

$$(a - 1)(b - 1) \leq k - 1 \leq a + b - 2, \tag{5}$$

deci

$$(a - 2)(b - 2) \leq 1. \tag{6}$$

Cum n este impar, avem $a \geq 3, \quad b \geq 3$ şi din inegalitatea (6) rezultă $a = b = 3$, apoi, din relaţia (5) obţinem $k = 5$, deci $n = 9$, adică subgrupurile H_1 şi H_2, având câte trei elemente, nu sunt improprii.

(b) Proprietatea precedentă optimizează o problemă a autoarei acestui articol, de pe lista scurtă pentru Olimpiada naţională de matematică din anul 2005, aflată printre subiectele de la Concursul interjudeţean "Nicolae Coculescu" din anul 2009 şi publicată apoi în [6].

Invităm cititorul să descopere singur alte posibile proprietăţi de acest gen.

Bibliografie

[1] I. Purdea, *Determinarea grupurilor finite de ordin* ≤ 11, Lucrările Seminarului de Didactica Matematicii, vol. 5., pag. 241-256, 1988-1989, Litografia Universităţii Babeş-Bolyai, Cluj Napoca, 1989

[2] I. Purdea, *Algebra pentru examenele de definitivat şi perfecţionare*, fascicola I, Grupuri, Litografia Universităţii Babeş-Bolyai, Cluj Napoca, 1981

[3] D. Heuberger *Asupra unei probleme de concurs*, revista "Argument" nr. 1/1999, pag. 13-15

[4] D. Heuberger şi colab. *Matematica pentru grupele de performanţă, clasa a XII-a*, Editura Dacia Educaţional, Cluj-Napoca, 2003

[5] Gazeta Matematică nr. 12/1994

[6] Revista de Matematică din Timişoara nr. 1/2010

Profesor, Colegiul Naţional "Gheorghe Şincai", Baia Mare

Teoreme şi probleme ce caracterizează rangul unei matrice

Vasile Pop

Abstract. This article presents equivalent characterizations of a matrix rank and supplies some contest related problems referring to this notion.

Noţiunea de rang al unei matrice este o noţiune primară în algebra liniară, motiv pentru care de mulţi ani ea este tratată superficial şi este considerată o noţiune elementară, simplă, care nu poate face probleme. Am considerat necesară apariţia acestei note pentru a repune la poziţia cuvenită atenţia pentru această noţiune, de fapt esenţială în algebra liniară.

Definiţii şi teoreme referitoare la rangul unei matrice

Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ o matrice, unde m şi n sunt numere naturale nenule, în general $m \geq 2$ şi $n \geq 2$.

Definim următoarele numere naturale:
k_1 = ordinul maxim al unui minor nenul din matricea A,
k_2 = numărul coloanelor liniar independente din matricea A,
k_3 = numărul liniilor liniar independente din matricea A,
$k_4 = n - def\,A$, unde defectul lui A este $def\,A$ = numărul parametrilor din soluţia sistemului omogen $A \cdot X = 0$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$, (numărul necunoscutelor secundare).

Teorema 1. *Pentru orice matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ numerele naturale k_1, k_2, k_3, k_4 sunt egale.*

Demonstraţie. a) Din definiţia lui k_2, oricare $k_2 + 1$ coloane ale matricei A sunt liniar dependente, deci în orice determinant de ordin $k_2 + 1$, o coloană este combinaţie liniară de altele, astfel că orice determinant de ordin $k_2 + 1$ este nul. În concluzie, $k_1 \leq k_2$.

b) Dacă în matricea A există $k = k_2$ coloane liniar independente, fie ele $C_1, C_2, \dots, C_k$ arătăm că putem găsi un minor nenul de ordin k format din elemente de pe aceste coloane. Din independenţă rezultă că singurul k-uplu $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ care verifică relaţia $x_1C_1 + x_2C_2 + \dots + x_kC_k = 0$ este $(0, 0, \dots, 0)$. Relaţia de mai sus se poate scrie ca un sistem de n ecuaţii cu k

necunoscute, omogen:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1k}x_k = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2k}x_k = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kk}x_k = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nk}x_k = 0 \end{cases}$$

Considerăm liniile $L'_1 = [a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1k}]$, $L'_2 = [a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2k}], \ldots,$ $L'_n = [a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{nk}]$, din care putem extrage maxim k linii liniar independente de celelalte $n-k$, care se pot exprima prin combinaţii liniare ale primelor. Aceasta revine la faptul că în sistemul dat $n-k$ dintre ecuaţii sunt consecinţe ale celorlalte k ecuaţii, deci sistemul se poate reduce la k ecuaţii, k necunoscute, omogen. Pentru ca unica lui soluţie să fie soluţia banală $(0, 0, \ldots, 0)$ este necesar şi suficient ca determinantul său să fie nenul. Din acest raţionament rezultă $k_2 \leq k_1$.

c) Din a), b), c) rezultă $k_1 = k_2$.

Este evident că dacă în matricea A avem un minor nenul atunci şi în matricea A^t minorul corespunzător este nenul, în concluzie k_1 este egal cu numărul coloanelor independente din A^t, adică egal cu numărul liniilor independente din A, deci $k_1 = k_3$.

d) Dacă în A ordinul maxim al unui minor nenul este k_1 şi alegem un astfel de minor, atunci sistemul omogen $A \cdot X = 0$, cu necunoscutele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se reduce la un sistem de k_1 ecuaţii cu n necunoscute (ecuaţiile corespunzătoare liniilor minorului). Rămân $n-k_1$ necunoscute secundare (parametri), în funcţie de care se dă soluţia generală. Astfel $k_1 = k_4$. $\square$

Definiţia 1. Pentru o matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, numărul $k = k_1 = k_2 = k_3 = k_4$, $k \leq \min\{m, n\}$, definit în Teorema 1.1, se numeşte rangul matricei A.

Definiţia 2. Pentru rangul matricei $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ avem următoarele definiţii echivalente:

D1. Rangul matricei A este ordinul maxim al unui minor nenul, din matricea A.

D2. Rangul matricei A este numărul maxim de coloane liniar independente din matricea A.

D3. Rangul matricei A este numărul maxim de linii liniar independente din matricea A.

Un rol foarte important în determinarea rangului unei matrice îl au transformările care nu schimbă rangul, numite transformări elementare.

Definiţia 3. Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ o matrice.

Se numeşte transformare elementară de linii urmăroarele transformări:

- schimbarea între ele a două linii
- înmulţirea unei linii cu un număr nenul
- adunarea unei linii la altă linie.

Analog se definesc şi matricele elementare de coloane.

Definiţia 4. Se numeşte matrice elementară de ordin k o matrice obţinută dintr-o matrice unitate I_k prin efectuarea unei transformări elementare.

Dăm în continuare fără demonstraţie câteva teoreme de bază care pot fi găsite în [1].

Teorema 2.

• *Efectuarea unei transformări elementare pe liniile matricei* $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ *revine la înmulţirea matricei* A *la stânga cu matricea elementară* $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, *corespunzătoare transformării.*

• *Efectuarea unei transformări elementare pe coloanele matricei* $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ *revine la înmulţirea matricei* A *la dreapta cu matricea elementară* $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *corespunzătoare transformării.*

Observaţia 1.

• Orice matrice elementară este o matrice inversabilă.

• Prin efectuarea într-o matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ a unei transformări elementare, rangul matricei nu se schimbă.

Teorema 3. *Orice matrice inversabilă se poate scrie ca un produs de matrice elementare.*

Teorema 4. *Prin înmulţirea unei matrice* $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, *la stânga sau la dreapta, cu o matrice inversabilă, rangul matricei nu se schimbă.*

Observaţia 2. a) În general, prin înmulţirea unei matrice la stânga sau la dreapta cu altă matrice, rangul nu creşte ($rangA \cdot B \leq \min\{rangA, rangB\}$).

b) Dacă A este matrice pătratică şi E este o matrice elementară atunci $\det(A \cdot E) = \det(E \cdot A) = \det(A)\det(E)$, proprietate folosită în demonstraţia: $\det(A \cdot B) = \det(A)\det(B)$.

c) Cu transformări elementare se poate lucra şi în matrice cu blocuri:

– schimbarea între ele a două benzi orizontale sau verticale.
– înmulţirea unei benzi orizontale la stânga cu o matrice pătratică inversabilă.
– înmulţirea unei benzi verticale la dreapta cu o matrice pătratică inversabilă.

– adunarea la o bandă orizontală a unei alte benzi orizontale înmulţită la stânga cu o matrice pătratică,
– adunarea la o bandă verticală a unei alte benzi verticale înmulţită la dreapta cu o matrice pătratică.

Definiţia 5. Spunem că două matrice $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ sunt echivalente şi notăm $A \equiv B$, dacă există două matrice inversabile $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ şi $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel ca $B = P \cdot A \cdot Q$.

Cea mai importantă teoremă legată de rangul unei matrice este:

Teorema 5. *Dacă $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ atunci există succesiunea de transformări elementare, pe liniile şi coloanele matricei A, care transformă matricea A într-o matrice de forma*

$$A' = \left[\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$$

şi atunci $rang A = rang A' = k$.

Teorema 6. *Matricele $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ sunt matrice echivalente dacă şi numai dacă ele au acelaşi rang.*

Probleme ce caracterizează rangul unei matrice

Problema 1. *Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ o matrice de rang $k \leq \min\{m, n\}$. Să se arate că există două matrice $B \in \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{C})$ şi $C \in \mathcal{M}_{k,m}(\mathbb{C})$ astfel ca $A = B \cdot C$.*

Soluţie. Dacă $rang A = k$ atunci

$$A \equiv \left[\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right],$$

deci există matricele inversabile $P \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$ şi $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel ca

$$A = P \cdot \left[\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] \cdot Q.$$

Este uşor de verificat egalitatea

$$\left[\begin{array}{c} I_k \\ \hline 0 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} I_k & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$$

şi atunci

$$A = P \cdot \left[\begin{array}{c} I_k \\ \hline 0 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} I_k & 0 \end{array}\right] \cdot Q.$$

Notăm

$$B = P \cdot \left[\begin{array}{c} I_k \\ \hline 0 \end{array}\right] \quad \text{şi} \quad C = \left[\begin{array}{c|c} I_k & 0 \end{array}\right] \cdot Q.$$

Problema 2. *Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ o matrice de rang $k \leq \min\{m, n\}$. Să se arate că există matricele coloane $C_1, C_2, \ldots, C_k$ şi matricele linie $L_1, L_2, \ldots, L_k$ astfel ca*

$$A = C_1 \cdot L_1 + C_2 \cdot L_2 + \cdots + C_k \cdot L_k.$$

Soluţie. Ca în problema precedentă, scriem matricea $\left[\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$ sub forma $C_1' \cdot L_1' + C_2' \cdot L_2' + \cdots + C_k' \cdot L_k'$ unde $C_1', C_2', \ldots, C_k'$ sunt primele k coloane ale matricei unitate I_m şi $L_1', L_2', \ldots, L_k'$ sunt primele k linii ale matricei unitate I_n. Definim $C_1 = P \cdot C_1'$, $C_2 = P \cdot C_2', \ldots,$ $C_k = P \cdot C_k'$ şi $L_1 = L_1' \cdot Q$, $L_2 = L_2' \cdot Q, \ldots,$ $L_k = L_k' \cdot Q$.

Problema 3. *Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ două matrice cu proprietatea $rangA + rangB \leq n$. Să se arate că există o matrice inversabilă $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel ca $A \cdot X \cdot B = 0$.*

(*Olimpiada Judeţeană* 2008)

Soluţie. Conform Teoremei 5 există matricele inversabile P_1, Q_1, P_2, Q_2 astfel ca

$$A = P_1 \cdot \left[\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] \cdot Q_1 \quad \text{şi} \quad B = P_2 \cdot \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & I_m \end{array}\right] \cdot Q_2,$$

unde $k = rangA$ şi $m = rangB$, $k_m \leq n$. Avem:

$$A \cdot X \cdot B = P_1 \cdot \left[\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] \cdot Q_1 \cdot X \cdot P_2 \cdot \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & I_m \end{array}\right] \cdot Q_2.$$

Dacă luăm $X = Q_1^{-1} \cdot P_1^{-1}$ obţinem

$$A \cdot X \cdot B = \left[\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & I_m \end{array}\right] = 0.$$

Problema 4. *Să se arate că singura funcţie surjectivă*

$$f : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \{0, 1, 2, \ldots, n\}$$

care verifică inegalitatea:

$$f(X \cdot Y) \leq \min\{f(X), f(Y)\}, \ \forall\ X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

este funcţia $f(X) = rangX, \ \forall\ X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

(*SEEMOUS* 2008)

Soluţie. Avem:

$$f(X \cdot I_n) \leq \min\{f(X), f(I_n)\} \ \Leftrightarrow$$

(1) • $f(X) \leq \min\{f(X), f(I_n)\} \ \Leftrightarrow \ f(X) \leq f(I_n), \ \forall\ X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

(2) • $f(I_n) = f(X \cdot X^{-1}) \leq \min\{f(X), f(X^{-1})\} \leq f(X)$,
pentru orice matrice inversabilă $X \in GL_n(\mathbb{R})$
(3) • Din (1) şi (2) rezultă $f(X) = f(I_n)$, $\forall\ X \in GL_n(\mathbb{R})$.
(4) • Dacă $X \in GL_n(\mathbb{R})$ şi $Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ atunci

$$f(X \cdot Y) \leq f(Y) \quad \text{şi} \quad f(Y) = f(X^{-1} \cdot X \cdot Y) \leq f(X \cdot Y),$$

deci $f(X \cdot Y) = f(Y)$ şi analog $f(Y \cdot X) = f(Y)$, $\forall\, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\forall\, X \in GL_n(\mathbb{R})$.

Se ştie că orice matrice $Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang k poate fi adusă prin transformări elementare pe linii şi coloane la matricea $J_k = \left[\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$, deci există matricele X şi Z din $GL_n(\mathbb{R})$ astfel ca $Y = X \cdot J_k \cdot Z$. Din (4) rezultă $f(Y) = f(J_k)$. Este suficient să definim funcţia f pe matricele J_k, $k = \overline{0, n}$. Din $J_k \cdot J_{k+1} = J_k$ rezultă $f(J_k) \leq f(J_{k+1})$ şi folosind surjectivitatea funcţiei f rezultă $f(J_0) = 0$, $f(J_1) = 1, \ldots, f(J_n) = n$. Deci $f(Y) = rangY$, $\forall\ Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Bibliografie

[1] V. Pop, *Algebră liniară*, Ed. Mediamira, Cluj-Napoca, 2004

[2] V. Pop (colectiv), *Matematică pentru grupele de performanţă. Manual pentru clasa a XI-a*, Ed. Dacia Educaţional, 2004

[3] V. Pop, *Algebră liniară pentru elevi, studenţi şi concursuri*, Ed. Mediamira, 2007

Universitatea Tehnică Cluj-Napoca
Str. C. Daicoviciu 15
400020, Cluj-Napoca, Romania
E-mail: vasile.pop@math.utcluj.ro

Tabăra de matematică, Baia Mare, februarie 2010

Gheorghe Maiorescu

La a douăsprezecea ediţie a taberei judeţene de matematică - secţiunea liceu, organizată şi în acest an la Colegiul Naţional "Gheorghe Şincai", au participat aproape 200 de elevi.

Cursurile au fost susţinute de către următorii profesori:
Bob Robert, Boroica Gabriela, Covaciu Traian, Darolţi Erika, Sfara Gheorghe – Colegiul Naţional "Vasile Lucaciu, *Bojor Florin, Boroica Gheorghe, Fărcaş Natalia, Heuberger Cristian, Muşuroia Nicolae, Petruţiu Crina* – Colegiul Naţional "Gheorghe Şincai", *Longaver Ludovic* – Liceul Teoretic "Nemeth Laszlo", *Râmbu Gheorghe* – matematician, *Şerba Lucia, Brisc Viorica, Birta Adriana* – Colegiul Tehnic "Anghel Saligny", *Pop Radu* – Liceul Sanitar, *Pop Anca* – Colegiul Tehnic "G. Bariţiu", *Cioclu Costel* – Grupul Şcolar Industrie Uşoară, *Pop Adrian* – Grupul Şcolar Tehnic.

Prezentăm în continuare subiectele testului final şi lista premianţilor taberei de la liceu.

Clasa a IX-a

1. Se consideră ecuaţiile

$$\begin{array}{l} x^2 - 2ax + b - \dfrac{1}{4} = 0 \\ x^2 - 2bx + c - \dfrac{1}{4} = 0 \\ x^2 - 2cx + a - \dfrac{1}{4} = 0 \end{array} \quad , \qquad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

a) Să se rezolve ecuaţiile pentru $a = b = c$;
b) Să se arate că pentru orice numere reale a, b, c, cel puţin una dintre ecuaţii are soluţii reale.

2. Se consideră ecuaţia

$$x^2 - \left([x] + \left[\frac{1}{x}\right] + 1\right) \cdot x + 1 = 0.$$

a) Să se arate că $3 + 2\sqrt{2}$ este soluţie a ecuaţiei date;

b) Să se arate că dacă α este soluţie a ecuaţiei date, atunci $\{\alpha\}+\left\{\frac{1}{\alpha}\right\}=1$;

c) Demonstraţi că ecuaţia nu are soluţii raţionale pozitive.

3. Se consideră triunghiul ascuţitunghic ABC înscris în cercul $C(O,R)$. Notăm cu A', B', C' punctele diametral opuse ale vârfurilor A, B, C şi cu H_1, H_2, H_3 ortocentrele triunghiurilor ABC', BCA', respectiv CAB'.

a) Să se arate că triunghiurile ABC şi $H_1H_2H_3$ au acelaşi centru de greutate;

b) Să se arate că triunghiurile ABC şi $H_1H_2H_3$ sunt asemenea;

c) Să se arate că patrulaterul $AC'BI$ este paralelogram, dacă şi numai dacă triunghiul ABC este echilateral, unde I reprezintă centrul cercului înscris al triunghiului ABC.

Test selectat de: prof. Pop Radu
prof. Muşuroia Nicolae

Clasa a X-a

1. Să se determine cel mai mare număr $n \in \mathbb{N}^*$ cu proprietatea că

$$\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{1}{\sqrt{4+\sqrt{15}}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n+\sqrt{4n^2-1}}}<3\sqrt{2}.$$

2. Se consideră funcţia $f:[0,\infty)\to[1,\infty)$ definită prin $f(x)=\sqrt{x^2+1}+x$.

a) Să se demonstreze că funcţia f este strict crescătoare;

b) Să se demonstreze că funcţia f este inversabilă şi calculaţi inversa sa;

c) Să se rezolve ecuaţia $\sqrt{x+1}+\sqrt{x}=\sqrt{4x^2+1}+2x$.

3. Fie $a, b, c \in (1,\infty)$. Să se demonstreze că:

a) $\log_a bc+\log_b ac+\log_c ab \geq 6$;

b) $(bc)^{\frac{1}{\log_{abc} a}}+(ac)^{\frac{1}{\log_{abc} b}}+(ab)^{\frac{1}{\log_{abc} c}} \geq 3(abc)^2$.

Test selectat de: prof. Pop Adrian
prof. Bojor Florin

Clasa a XI-a

1. a) Să se arate că dacă funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este periodică şi există $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = c \in \mathbb{R}$, atunci $f(x) = c$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

b) Să se determine funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ştiind că $f(x+2)+f(x) = 2f(x+1)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$ şi că $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - x) = a \in \mathbb{R}$.

2. Se consideră matricele $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ astfel încât $A+B+C+I_n = O_n$.
Să se arate că $\det((AB - C)(BC - A)(CA - B)) \geq 0$.

(*prof. Muşuroia Nicolae, G.M.*)

3. Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ cu $a_1 \in [1, \infty)$ şi $a_{n+1} = 1 + a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$, $\forall\, n \geq 1$.

a) Să se arate că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător;

b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{a_k}$.

Test selectat de: prof. Fărcaş Natalia
prof. Boroica Gheorghe

Clasa a XII-a M1

1. Se consideră sistemul de ecuaţii liniare $\begin{cases} m \cdot x + y - z = 2 \\ x + y - z = 2 \\ -x + y + z = 0 \end{cases}$, $m \in \mathbb{R}$.

a) Determinaţi $m \in \mathbb{R}$ astfel încât matricea sistemului să aibă rangul 2;

b) Demonstraţi că sistemul este compatibil pentru orice $m \in \mathbb{R}$;

c) Determinaţi $m \in \mathbb{R}$ astfel încât sistemul să admită o soluţie $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ cu $x_0 + y_0 + z_0 = 4$;

d) Demonstraţi că pentru orice $m \in \mathbb{R}$, y este necunoscută principală.

2. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ considerăm integrala $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx$.

a) Calculaţi I_1 şi I_2;

b) Demonstraţi că $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$;

c) Demonstraţi că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ au loc $I_{n+1} \leq I_n$ şi $I_n \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$;

d) Demonstraţi că şirul $(I_n \cdot I_{n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ este convergent şi calculaţi limita sa.

3. Fie $G,\cdot)$ un grup. Pentru fiecare element $a \in G$ considerăm funcţia $\varphi_a : G \to G$, $\varphi_a(x) = a \cdot x \cdot a'$, unde a' reprezintă simetricul elementului a. De asemenea fie mulţimea $K = \{\varphi_a | a \in G\}$.

a) Arătaţi că $\varphi_a(x \cdot y) = \varphi_a(x) \cdot \varphi_a(y)$, $\forall\, x, y \in G$;

b) Demonstraţi că orice funcţie φ_a este bijectivă;

c) Arătaţi că pentru orice $a, b \in G$, are loc $\varphi_a \circ \varphi_b = \varphi_{a \cdot b}$;

d) Demonstraţi că mulţimea K are un singur element dacă şi numai dacă grupul $(G, \cdot)$ este comutativ.

Test selectat de: prof. Longaver Ludovic
prof. Heuberger Cristian

Premianţii

Clasa a IX-a

Excelenţă. *Petca Alexandra* (C. N. "Vasile Lucaciu").

Premiul I. *Conţi Andrada* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Petruş Paul* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Feier Florin* (C. N. "Vasile Lucaciu"), *Morar Andrei* (C. N. "Gheorghe Şincai").

Premiul al II-lea. *Paşca Vlad* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Zicher Norbert* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Pop Sergiu* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Dragoş Hanna* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Lupu Catrinel* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Rusu Diana* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Tărţan Diana* (C. N. "Vasile Lucaciu").

Premiul al III-lea. *Pop Adrian* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Buzilă Bianca* (C. N. "Vasile Lucaciu"), *Csoregi Natalia* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Naghi Andrei* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Pop Alexandra* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Achim Adrian* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Pop Marinel* (C. N. "Vasile Lucaciu"), *Săcui Ana-Maria* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Sfara Anamaria* (C. N. "Vasile Lucaciu"), *Ciurdaş Vlad* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Kulcsar Andrada* (C. N. "Gheorghe Şincai").

Clasa a X-a

Excelenţă. *Todoran Denisa* (C. N. "Gheorghe Şincai").

Premiul I. *Petrovan Marius* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Kando Enikö* (C. N. "Gheorghe Şincai").

Premiul al II-lea. *Fînăţan Vlad* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Pop Mihai* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Jaszberenyi Andrea* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Mesaroş Adelina* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Rusznak Erik* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Chiş Diana* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Mihalca Daniel* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Iriciuc Iosif* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Lupan Andreea* (C. N. "Gheorghe Şincai").

Premiul al III-lea. *Dumitru Luiza* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Iepan Cristian* (C. N. "Vasile Lucaciu"), *Miholca Diana* (C. N. "Vasile Lucaciu"), *Moldovan Miruna* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Pop Andrei Vasile* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Târnovan Andrada* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Romocea Roxana* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Bizău Alin* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Ghişe Lavinia* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Moldovan Francisc* (C. N. "Vasile Lucaciu"), *Mugur Oana* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Vancea Paula* (C. N. "Gheorghe Şincai").

Clasa a XI-a

Excelenţă. *Crişan Vlad* (C. N. "Vasile Lucaciu").

Premiul I. *Horvat Mihaela* (C. N. "Gheorghe Şincai").

Premiul al II-lea. *Radu Andrada* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Puşcaş Karla* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Micu Alexandru* (C. N. "Gheorghe Şincai").

Premiul al III-lea. *Bîrle Dan* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Ionuţaş Bogdan* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Pop Marius* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Vlad Olimpia* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Fărcăşan Roxana* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Marian Alexandru* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Sabo Sorin* (C. N. "Vasile Lucaciu"), *Ştefan Bogdan* (C. N. "Gheorghe Şincai").

Clasa a XII-a M1

Excelenţă. *Bunu Daria* (C. N. "Gheorghe Şincai").

Premiul I. *Tot Roxana* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Grumaz Iulia* (C. N. "Gheorghe Şincai").

Premiul al II-lea. *Modis Laszlo* (Liceul teoretic "Nemeth Laszlo"), *Butean Cristian* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Barta Ştefan* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Rogojan Cătălin* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Costin Simona* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Maroşi Diana* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Barbul Andrada* (C. N. "Gheorghe Şincai").

Premiul al III-lea. *Mureşan Diana* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Lang Oana* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Iuga Vasile* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Gava Luigi* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Hotea Bogdan Mihai* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Pop Ioana* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Pop Iulia* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Palfi Mihai* (C. N. "Vasile Lucaciu"), *Marian Daniel* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Rus Ovidiu* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Mihaşca Vasilica* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Crişan Daniel* (C. N. "Gheorghe Şincai").

Inspector I. S. J. Maramureş

Olimpiada de matematică, etapa locală, 13.02.2010

Clasa a IX-a M1

1. a) Să se demonstreze că $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2 = \dfrac{n(4n^2-1)}{3}$.

b) Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, să se determine numerele reale $x_1, x_2, \ldots, x_n$ care satisfac inegalitatea $3(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)-6(x_1+3x_2+\cdots+(2n-1)x_n)+n(4n^2-1) \leq 0$.

(*prof. Tivadar Cornel, prof. Boroica Gabriela*)

2. Se consideră $a \in \mathbb{R}$ şi ecuaţia $\{a^2\}x^2 - 2\{a\}x + 1 = 0$.

a) Să se arate că dacă rădăcinile ecuaţiei sunt numere întregi, atunci $a \in \mathbb{Q}$.

b) Să se arate că există o infinitate de valori ale lui $a > 1$, astfel încât ecuaţia să aibă rădăcinile întregi ($\{a\}$ reprezintă partea fracţionară a numărului a).

(*prof. Heuberger Dana*)

3. Se consideră triunghiul ABC şi punctele M, N, P, Q, R, S astfel încât
$\overrightarrow{BM} = k \cdot \overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{CN} = k \cdot \overrightarrow{NA}$, $\overrightarrow{AP} = k \cdot \overrightarrow{PB}$,
$\overrightarrow{AM} = p \cdot \overrightarrow{MQ}$, $\overrightarrow{BN} = p \cdot \overrightarrow{NR}$, $\overrightarrow{CP} = p \cdot \overrightarrow{PS}$.
Să se arate că triunghiurile MNP şi QRS au acelaşi centru de greutate.

(*Gazeta Matematică nr.* 11/2009)

Subiectele au fost selectate de: prof. Boroica Gabriela
prof. Covaciu Traian
prof. Heuberger Dana

Clasa a X-a M1

1. a) Se consideră $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a \cdot b < 0$ şi $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$. Să se arate că dacă $\left(z_1 + \dfrac{a}{z_2}\right)\left(z_2 + \dfrac{b}{z_1}\right) \in \mathbb{R}$, atunci există $k \in \mathbb{R}^*$ astfel încât $z_2 = k \cdot \overline{z}_1$.

(*prof. Gherasin Gheorghe*)

b) Să se arate că dacă $z \in \mathbb{C}^*$ şi $\left|z^3 - \dfrac{1}{z^3}\right| \geq 14$, atunci $\left|z - \dfrac{1}{z}\right| \geq 2$.

(*prof. Tivadar Cornel*)

2. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia
$$\sqrt[3]{7\cdot x+18}+\sqrt[3]{-x^2-x+8}+\sqrt[3]{x^2-6\cdot x+1}=3.$$
(*prof. Boroica Gheorghe*)

3. Să se determine funcţiile $f,g:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, ştiind că satisfac simultan condiţiile:

a) $f\left(\dfrac{x}{3}\right)+2\le\log_3 x\le g(x)-1$;

b) $g\left(\dfrac{x}{3}\right)\le\log_3 x\le f(x)+1$, oricare ar fi $x\in(0,\infty)$.

(*Gazeta Matematică nr.* 2/2009)

Subiectele au fost selectate de: prof. Petruţiu Crina
prof. Boroica Gheorghe
prof. Ghersin Gheorghe

Clasa a XI-a M1

1. Se consideră mulţimea $\mathcal{M}=\{X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})|X^2=I_2\}$.

a) Demonstraţi că pentru orice matrice $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ are loc egalitatea $A^2-(a+d)A+\det(A)I_2=0_2$ (relaţia Cayley - Hamilton);

b) Demonstraţi că mulţimea $\mathcal{M}$ are o infinitate de elemente;

c) Există matice $X\in\mathcal{M}$ astfel încât $X\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}X$?

d) Demonstraţi că oricare ar fi $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{C}$, există $A,B,C\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ astfel încât $(\alpha\cdot A+\beta\cdot B+\gamma\cdot C)^2=(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)I_2$.

(*prof. Giurgi Vasile*)

2. Se consideră şirul $(a_n)_{n\ge1}$ cu $a_1=5$ şi care verifică relaţia
$$2n(a_{n+1}-a_n)+3a_{n+1}-5a_n=8n^2+32n+30,\quad \forall n\in\mathbb{N}^*.$$
Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n^2}$.

(*Gazeta Matematică nr.* 11/2009)

3. Pentru fiecare $n\in\mathbb{N}^*$ se defineşte funcţia $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=x^3+n^2\cdot x$.
Se admite faptul cunoscut că toate funcţiile f_n sunt bijective.
Se consideră şirurile $(a_n)_{n\ge1}$, $a_n=f_n^{-1}(n)$ şi $(b_n)_{n\ge1}$, $b_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$.

a) Demonstraţi că $a_n < \dfrac{1}{n}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$;

b) Demonstraţi că şirurile $(a_n)_{n\geq 1}$ şi $(n\cdot a_n)_{n\geq 1}$ sunt convergente şi calculaţi limita fiecăruia;

c) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$, dacă această limită există.

(*prof. Heuberger Cristian*)

Subiectele au fost selectate de: prof. Heuberger Cristian
prof. Giurgi Vasile
prof. Lucuş Teodor

Clasa a XII-a M1

1. Să se calculeze următoarele integrale:

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{3^x}{3^{2x} - 3^{x+1} + 3}dx$; b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{3^x + 3^{1-x} - 3}dx$.

(*prof. Szöllösy Gheorghe, Gazeta Matematică nr.* $7-8-9/2009$)

2. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ şi mulţimea

$$G = \{X(a) = I_2 + a \cdot A | a \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}\}.$$

a) Să se demonstreze că $X(a) \cdot X(b) = X(a + b + a \cdot b)$, $\forall\, a, b \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$;

b) Să se demonstreze că mulţimea G formează un grup abelian în raport cu înmulţirea matricelor din $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$;

c) Să se calculeze $X(1) \cdot X(2) \cdot \ldots \cdot X(2010)$.

3. Se consideră funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $g(x) = x + \sin x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, iar funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ verifică relaţia $f(x) + \sin(f(x)) = x^3$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

a) Să se calculeze $\displaystyle\int xg'(x)dx$, $x \in \mathbb{R}$;

b) Să se demonstreze că funcţia g este inversabilă;

c) Să se demonstreze că funcţia f admite primitive;

d) Să se calculeze $\displaystyle\int_0^{\sqrt[3]{\pi}} x^2 f(x)dx$.

(*prof. Muşuroia Nicolae*)

Subiectele au fost selectate de: prof. Sfara Gheorghe
prof. Muşuroia Nicolae
prof. Bojor Florin

Concursul "Argument" al Colegiului Naţional "Gheorghe Şincai" Ediţia I

Clasa a IX-a

1. Printr-un punct din interiorul unui paralelogram de arie S şi perimetru P, se duc paralele la laturile sale, care împart paralelogramul în patru paralelograme mai mici.

Să se arate că cel puţin două din ele au perimetrele cel mult $\frac{1}{2}P$ şi cel puţin două din ele au ariile cel mult $\frac{1}{4}S$.

2. Fie x, y numere reale care verifică relaţia

$$x(x^2 + y) = (x^2 + y + 1)(1 - y).$$

Să se arate că dacă x este număr natural nenul, atunci y este număr iraţional.

3. Să se determine numerele pozitive a, b astfel ca mulţimea punctelor (x, y) din plan care verifică relaţiile

$$|x| < a, \quad |y| < b \text{ şi } |x| + |y| < 1$$

să fie punctele din interiorul unui octogon regulat.

(*Subiect propus de Conf. univ. dr. Vasile Pop*)

Clasa a X-a

1. Să se determine funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifică relaţia

$$f(f(x) + y) = 3x + f(f(y) - 2x),$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$ şi $y \in \mathbb{R}$.

2. Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de numere reale nenule care verifică relaţia:

$$x_n^2 - x_{n-1}x_{n+1} = a, \quad n \geq 1,$$

unde a, x_0, x_1, x_2 sunt numere întregi.

a) Să se arate că există $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ astfel ca $x_{n+1} = \alpha \cdot x_n + \beta \cdot x_{n-1}$, $n \geq 2$.

b) Să se arate că dacă x_1 îl divide pe $x_2 + x_0$, atunci toţi termenii şirului sunt numere întregi.

3. Fie $ABCD$ un patrulater convex. Să se determine locul geometric al punctelor X din planul patrulaterului, care verifică relaţia

$$XA^2 + XB^2 + CD^2 = XB^2 + XC^2 + DA^2 = XC^2 + XD^2 + AB^2$$
$$= XD^2 + XA^2 + BC^2.$$

(*Subiect propus de Conf. univ. dr. Vasile Pop*)

Clasa a XI-a

1. Se consideră şirurile $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ date prin relaţiile de recurenţă

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n^2 + a_n b_n \\ b_{n+1} = b_n^2 + a_n b_n, \ n \geq 0, \ a_0 \in \mathbb{R}, \ b_0 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Să se studieze monotonia şi mărginirea celor două şiruri.

2. Fie $z = x + iy$ un număr complex cu x, y reale.

a) Să se arate că dacă $\sqrt{2}|z+1| = |z+i| + |z-i|$, atunci $|z| = 1$ şi $x \geq 0$.

b) Să se determine locul geometric al punctelor M din planul pătratului $ABCD$ pentru care are loc relaţia

$$\sqrt{2}\max\{MA, MC\} = MB + MD.$$

3. Să se arate că pentru orice $n \geq 3$ există o permutare σ a mulţimii $\{1, 2, \ldots, n\}$, astfel ca pentru orice i, j, k cu $1 \leq i < j < k \leq n$ să avem

$$\sigma(i) + \sigma(k) \neq 2\sigma(j).$$

(*Subiect propus de Conf. univ. dr. Vasile Pop*)

Clasa a XII-a

1. Se consideră funcţiile

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = axy - x - y + 2$$

şi

$$g : (-1,1) \times (-1,1) \to \mathbb{R}, \quad g(x,y) = \frac{bx + cy}{1 - xy},$$

unde a, b, c sunt numere reale fixate.

Să se determine a, b, c astfel ca:

a) Legea $x * y = f(x,y)$ să fie lege de compoziţie pe intervalul $[0,2]$.

b) Legea $x \circ y = g(x,y)$ să fie lege de compoziţie pe intervalul $(-1,1)$.

c) În ce condiţii legile de la a) şi b) admit element neutru?

2. Se consideră şirurile de numere reale $(x_n)_n$, $(y_n)_n$ definite prin relaţiile de recurenţă

$$x_{n+1} = \frac{x_n + 3y_n}{4}, \quad y_{n+1} = \frac{3x_n + 2y_n}{5}, \quad n \geq 0.$$

Să se arate că pentru orice x_0, y_0 şirurile sunt convergente şi să se determine limitele lor.

3. Să se arate că dacă există două matrice $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ astfel ca

$$\det(AB - BA) \neq 0 \text{ şi } A^2 + B^2 = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{k}(AB - BA),$$

unde $k \in \mathbb{N}^*$, atunci n este multiplu de k. Să se dea exemple de astfel de matrice pentru $n = 2010$.

(*Subiect propus de Conf. univ. dr. Vasile Pop*)

Premiile la concursul "Argument", ediţia I

Clasa a IX-a

Premiul I. *Feier Florin* (C. N. "Vasile Lucaciu")

Premiul al II-lea. *Csereoka Petra* (C. N. "Mihai Eminescu")

Premiul al III-lea. *Blaga Bianca Cerasela* (C. N. "Andrei Mureşanu")

Menţiune. *Dicu Daria* (C. N. "Dragoş Vodă"), *Morar Andrei* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Petran Teodora* (C. N. "Mihai Eminescu"), *Puicar Bogdan* (C. N. "Dragoş Vodă")

Clasa a X-a

Premiul I. *Cerrahoglu Omer* (C. N. "Vasile Lucaciu")

Premiul al II-lea. *Petrovan Marius* (C. N. "Gheorghe Şincai")

Premiul al III-lea. *Kando Enikö* (C. N. "Gheorghe Şincai")

Menţiune. *Ardelean Horia* (C. N. "Dragoş Vodă"), *Ciceu Andrei* (C. N. "Andrei Mureşanu"), *Miholca Diana* (C. N. "Vasile Lucaciu"), *Pop Andrei* (C. N. "Vasile Lucaciu"), *Todoran Denisa* (C. N. "Gheorghe Şincai")

Clasa a XI-a

Premiul I. *Crişan Vlad* (C. N. "Vasile Lucaciu")

Premiul al II-lea. *Horvat Mihaela* (C. N. "Gheorghe Şincai")

Premiul al III-lea. *Gheţie Mariana* (C. N. "Gheorghe Şincai")

Menţiune. *Perşa Raul* (C. N. "Mihai Eminescu"), *Puşcaş Karla* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Vălean Dan* (C. N. "Andrei Mureşanu")

Clasa a XII-a

Premiul I. *Moldovan Dorin* (C. N. "Andrei Mureşanu")

Premiul al II-lea. *Tot Roxana* (C. N. "Gheorghe Şincai")

Premiul al III-lea. *Bunu Daria* (C. N. "Gheorghe Şincai")

Menţiune. *Lang Oana* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Munteanu Theodor* (C. N. "Dragoş Vodă")

Concursul "Gheorghe Şincai" pentru micii matematicieni

1. Considerăm numerele:

$a = 836 - 688 - 2 \times (2 \times 50 - 36)$

$b = 522 - 516 : 3 + 25 \times 6$

$c = 36 \times [256 - 25 \times (81 - 150 : 2 + 4)] : (966 - n)$, unde n este cel mai mare număr de 3 cifre diferite.

1) Aflaţi numerele a, b, c;

2) Calculaţi diferenţa dintre numărul a şi jumătatea numărului c;

3) Calculaţi produsul dintre dublul sumei numerelor a şi b şi triplul diferenţei numerelor c şi a.

2. La o fermă sunt crescute în total 1200 de animale (vaci, capre şi oi). Numărul vacilor este un sfert din numărul caprelor, iar numărul oilor este dublu faţă de al celorlalte animale la un loc.

1) Câte oi creşte ferma?

2) Câte vaci şi capre sunt la fermă?

3. Se dă şirul de numere: 0, 5, 10, 15, 20, 25,..., 10050.

1) Câţi termeni are şirul?

2) Cu cât este egală suma primilor 20 de termeni?

3) Care este primul număr din şir care are suma cifrelor egală cu 18?

(*Subiect propus de profesorii Cristian Heuberger şi Nicolae Muşuroia*)

Testare pentru înscriere în clasa a V-a, 20 mai 2010

1. Considerăm numerele:
$a = 920 - (6 \times 14 - 2) \times (66 - 8 \times 7)$
$b = 857 - 468 : (3 \times 2 - 9 : 3) - 1 - 21 \times 31$
$c = 5 + 15 \times [300 - 72 \times (100 - 180 : 2 - 6)] : (413 - 2 \times n)$, unde n este cel mai mic număr format din 3 cifre pare diferite.

1) Calculaţi cele trei numere;
2) Calculaţi diferenţa dintre succesorul lui a şi predecesorul lui b;
3) Pentru $c = 41$, calculaţi produsul dintre triplul sumei numerelor a şi b şi diferenţa dintre b şi c.

2. Peste câţiva ani, la Colegiul Naţional "Gheorghe Şincai" din Baia Mare, profesorii, elevii de gimnaziu şi elevii de liceu vor fi în total în număr de 960. Suma numărului de profesori şi a numărului de elevi de liceu va fi de 7 ori mai mare decât numărul de elevi de gimnaziu.
Numărul profesorilor va fi cu 45 mai mic decât numărul elevilor de gimnaziu.

1) Câţi elevi de gimnaziu vor fi?
2) Câţi profesori şi câţi elevi de liceu vor fi?

3. Se consideră următorul şir de numere: $20, 30, 40, 50, \ldots, 2010$.

1) Care este suma primilor 20 de termeni si şirului?
2) Determinaţi numărul termenilor şirului;
3) Care este primul număr din şir care are înaintea lui mai mulţi termeni decât după el? (justificaţi răspunsul)

(*Subiect propus de profesorii Cristian Heuberger şi Nicolae Muşuroia*)

Concursurile anului şcolar 2009-2010

Clasa a IX-a

Conţi Andrada (prof. Petruţiu Crina)
- menţiune la Concursul "Papiu Ilarian", Tg. Mureş

Dragoş Hanna (prof. Dana Heuberger)
- menţiune la Concursul "Gheorghe Lazăr", Sibiu

Morar Andrei (prof. Dana Heuberger)
- menţiune la Concursul "Marian Ţarină", Turda

Zicher Norbert (prof. Heuberger Dana)
- menţiune la Concursul "Gheorghe Lazăr", Sibiu

Clasa a X-a

Fînăţan Vlad (prof. Heuberger Dana)
- menţiune la Concursul "Gheorghe Lazăr", Sibiu

Petrovan Marius (prof. Heuberger Dana)
- premiul I la Concursul interjudeţean "Grigore Moisil", Zalău
- premiul al II-lea la Concursul "Marian Ţarină", Turda
- premiul al II-lea la Concursul "Gheorghe Lazăr", Sibiu
- premiul al III-lea la Concursul "Unirea", Focşani
- premiul a III-lea la Concursul "Papiu Ilarian", Tg. Mureş

Clasa a XI-a

Gheţie Mariana (prof. Bojor Florin)
- menţiune la Concursul "Unirea", Focşani

Horvat Mihaela (prof. Fărcaş Natalia)
- premiul al II-lea la Concursul "Gheorghe Lazăr", Sibiu
- premiul al III-lea la Concursul "Marian Ţarină", Turda
- menţiune la Concursul "Papiu Ilarian", Tg. Mureş

Kando Enikö (prof. Bojor Florin)
- menţiune la Concursul "Unirea", Focşani

Radu Andrada (prof. Bojor Florin)
- menţiune la Concursul "Papiu Ilarian", Tg. Mureş

Clasa a XII-a

Bunu Daria (prof. Boroica Gheorghe)
- menţiune la Concursul "Papiu Ilarian", Tg. Mureş

Olimpiada judeţeană

Clasa a IX-a

Premiul al III-lea. *Petruş Paul Andrei, Morar Andrei, Vago Timea, Dragoş Hanna* (prof. Heuberger Dana)

Clasa a X-a

Premiul I. *Petrovan Marius* (prof. Heuberger Dana), *Todoran Denisa* (prof. Heuberger Cristian)

Premiul al II-lea. *Mihalca Daniel* (prof. Muşuroia Nicolae), *Fînăţan Vlad* (prof. Heuberger Dana)

Premiul al III-lea. *Kando Enikö* (prof. Bojor Florin), *Bizău Mădălina* (prof. Bojor Florin)

Clasa a XI-a

Premiul I. *Horvat Mihaela* (prof. Fărcaş Natalia)

Premiul al II-lea. *Radu Andrada* (prof. Bojor Florin), *Ciobanu Andrei* (prof. Bojor Florin), *Puşcaş Karla* (prof. Bojor Florin), *Pop Otilia Helga* (prof. Fărcaş Natalia)

Premiul al III-lea. *Ferenţ Ioan Grigore* (prof. Boroica Gheorghe), *Gheţie Mariana* (prof. Bojor Florin), *Mureşan Andrada* (prof. Fărcaş Natalia)

Clasa a XII-a

Premiul I. *Tot Roxana* (prof. Boroica Gheorghe)

Premiul al III-lea. *Barta Ştefan* (prof. Muşuroia Nicolae)

Rezolvarea problemelor din numărul anterior

Clasa a IX-a

1. *Dacă* $x, y, z > 0$, *atunci:*

$$\frac{x}{x^2+yz}+\frac{y}{y^2+zx}+\frac{z}{z^2+xy}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right).$$

(*D. M. Bătineţu-Giurgiu*)

Soluţie. Arătăm că

$$\frac{x}{x^2+yz}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right). \tag{1}$$

Aducând la acelaşi numitor şi efectând calculele, (1) este echivalentă cu inegalitatea $y(x-z)^2+z(x-y)^2\ge 0$, cu egalitate dacă şi numai dacă $x=y=z$. Prin urmare avem:

$$\frac{x}{x^2+yz}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right);\quad \frac{y}{y^2+zx}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{x}\right);\quad \frac{z}{z^2+xy}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right).$$

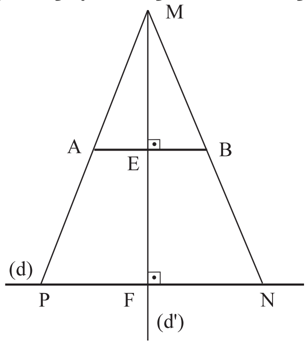
Adunând membru cu membru aceste inegalităţi, obţinem inegalitatea cerută.

2. *Fiecărui punct din plan îi este asociat un număr real, astfel încât pentru orice triunghi, numărul asociat ortocentrului acestuia este egal cu numărul asociat centrului cercului circumscris. Să se arate că fiecărui punct din plan i s-a asociat acelaşi număr real.*

(*Gheorghe Boroica*)

Soluţie. Fie punctele $A \neq B$ arbitrare din plan şi f funcţia din enunţ.

Considerăm dreapta $d \| AB$ şi dreapta d' – mediatoarea segmentului $[AB]$ (vezi figura).
Din ipoteză, $f(F)=f(B)$ în triunghiul dreptunghic MFN şi $f(F)=f(A)$ în triunghiul dreptunghic MFP. Rezultă că $f(A)=f(A)$ şi A, B arbitrare din plan, deci f este o funcţie constantă.



3. *Determinaţi toate numerele prime p pentru care numărul* $2^p + p^4$ *este de asemenea un număr prim.*

(*Gheorghe Boroica*)

Soluţie. Dacă $p \geq 5$, p prim, atunci $p = M_3 \pm 1$, deci $2^p + p^4 = (3-1)^p + p^4 = M_3 + (-1)^p + M_3 + 1 = M_3$, şi cum $2^p + p^4 > 3$, deducem că numărul $2^p + p^4$ nu e prim.

Dacă $p = 2$, atunci $2^p + p^4 = 20$ nu e prim.

Dacă $p = 3$, atunci $2^p + p^4 = 89$ este număr prim. Aşadar, $p = 3$ este unica soluţie.

4. *Se consideră* $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$ *şi numerele* $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (0, \infty)$ *astfel încât* $x_1 \cdot x_2 \ldots x_n \geq 1$. *Să se arate că*

$$\frac{x_1^2}{x_2 + x_3 + \cdots + x_n + 1} + \frac{x_2^2}{x_1 + x_3 + \cdots + x_n + 1} + \ldots + \frac{x_n^2}{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + 1} \geq 1.$$

(*Generalizare a problemei O* : 1172 *din G.M.* 10/2007, *autor D. M. Bătineţu-Giurgiu*)
(*Gheorghe Boroica*)

Soluţie. Fie $S = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ şi E membrul stâng al inegalităţii de demonstrat. Atunci avem:

$$E = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2}{S - x_k + 1} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2}{S - x_k + \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2}{S - x_k + \frac{S}{n}}$$
$$\overset{Bergstrom}{\geq} \frac{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2}{nS - S + S} = \frac{S^2}{nS} = \frac{S}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \geq 1,$$

deci $E \geq 1$. Avem egalitate dacă $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1$.

5. *Se consideră ecuaţia* $ax^2 + bx + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}^*$ *cu rădăcinile* x_1 *şi* x_2. *Dacă* $x_1 \in \mathbb{Q}$ *şi* $x_2 \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$, *să se arate că cel puţin două dintre numerele* a, b, c *sunt iraţionale.*

(*Florin Bojor*)

Soluţie. Dacă $a \in \mathbb{Q}$, atunci $\dfrac{b}{a} = -(x_1 + x_2) \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \Rightarrow b \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$.

$$\frac{c}{a} = x_1 x_2 \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \Rightarrow c \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}.$$

Dacă $a \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, atunci $\frac{b}{c} = -\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right) \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, deci cel puţin unul dintre numerele b şi c este iraţional.

6. *Să se arate că dacă a, b, c sunt numere reale, nu toate egale, atunci există două valori ale parametrului $m \in \mathbb{R}$, astfel încât ecuaţia*

$$(a+m)x^2 + (b+m)x + (c+m) = 0$$

să aibă rădăcinile egale.

(*Gheorghe Fătu*, *C. N. "Gheorghe Şincai"*)

Soluţie. $\Delta = (b+m)^2 - 4(a+m)(c+m) = -3m^2 + m(2b-4a-4c) + b^2 - 4ac$. $\Delta m = 4(2a+2c-b)^2 - 48ac + 12b^2 = 8[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] > 0$.

Prin urmare, ecuaţia $\Delta = 0$ are două soluţii reale diferite, m_1 şi m_2.

7. *a) Se consideră triunghiul ascuţitunghic ABC, punctele $D \in BC$, $E \in AC$ şi $F \in AB$ astfel încât $AD \perp AC$, $BE \perp AB$, $CF \perp BC$ şi $\{A'\} = BC \cap EF$, $\{B'\} = AC \cap DF$ şi $\{C'\} = AB \cap DE$. Să se demonstreze că*

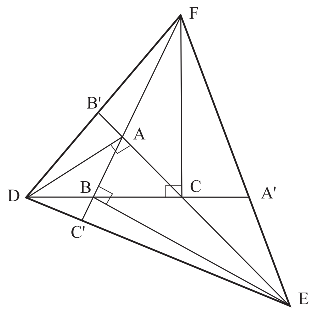
$$\frac{A'F}{A'E} \cdot \frac{B'D}{B'F} \cdot \frac{C'E}{C'D} \geq 8.$$

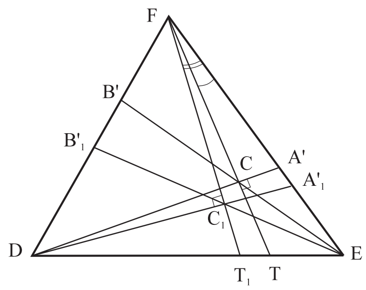
b) Se consideră triunghiul echilateral DEF. Să se demonstreze că există un unic triunghi ascuţitunghic ABC situat în interiorul triunghiului DEF, astfel încât $AD \perp AC$, $BE \perp AB$ şi $CF \perp BC$.

(*Dana Heuberger*)

Soluţie. a) Notăm $\frac{AF}{AB} = x$, $\frac{BD}{BC} = y$ şi $\frac{CE}{CA} = z$ şi lungimile laturilor triunghiului ABC cu a, b, c, ca de obicei.

Aplicăm teorema sinusurilor în triunghiul BCE şi obţinem $\frac{a}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - A\right)} = \frac{CE}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - B\right)}$ şi apoi $z = \frac{CE}{b} = \frac{a}{b} \cdot \frac{\cos B}{\cos A}$. Analog rezultă $x = \frac{b}{c} \cdot \frac{\cos C}{\cos B}$ şi $y = \frac{c}{a} \cdot \frac{\cos A}{\cos C}$ şi apoi $x \cdot y \cdot z = 1$.





În triunghiul CDE, cu transversala $A - B - C'$, aplicăm teorema lui Menelaus şi obţinem $\dfrac{C'E}{C'D} = \dfrac{1+z}{y}$. Analog se obţin rapoartele $\dfrac{A'F}{A'E} = \dfrac{1+x}{z}$ şi $\dfrac{B'D}{B'F} = \dfrac{1+y}{x}$. Rezultă

$$\frac{A'F}{A'E} \cdot \frac{B'D}{B'F} \cdot \frac{C'E}{C'D} = \frac{(1+x)(1+y)(1+z)}{xyz} = (1+x)(1+y)(1+z) \overset{medii}{\geq} 8.$$

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $x = y = z = 1$.

b) Să observăm mai întâi că dacă în punctul a) avem triunghiul echilateral ABC, obţinem $x = y = z = 1$, apoi $\dfrac{A'F}{A'E} = \dfrac{B'D}{B'F} = \dfrac{C'E}{C'D} = 2$, iar triunghiul DEF este echilateral. În plus, avem $\mu(\widehat{CFE}) = \mu(\widehat{ADF}) = \mu(\widehat{BED}) = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{3\sqrt{3}}$. Aşadar, dacă avem triunghiul echilateral DEF, construim în interior punctele A, B, C astfel încât

$$\mu(\widehat{CFE}) = \mu(\widehat{ADF}) = \mu(\widehat{BED}) = \operatorname{arctg} \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

şi

$$\mu(\widehat{AFD}) = \mu(\widehat{BDE}) = \mu(\widehat{CEF}) = \frac{\pi}{6} - \operatorname{arctg} \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

şi obţinem triunghiul echilateral ABC care verifică enunţul.

Presupunem că există şi soluţia $A_1B_1C_1$. Notăm cu $\{A_1'\} = DC_1 \cap EF$, $\{B_1'\} = EC_1 \cap DF$ şi $\{C_1'\} = FB_1 \cap DE$. Presupunem că $\dfrac{A_1'F}{A_1'E} = 2$. Obţinem $\dfrac{\pi}{3} < \mu(\widehat{FA_1'C_1}) < \mu(\widehat{FA'C}) < \dfrac{\pi}{2}$ şi $\dfrac{\pi}{6} > \mu(\widehat{A_1'FC_1}) > \mu(\widehat{A'FC})$.

Fie $\{T\} = FC \cap DE$ şi $\{T_1\} = FC_1 \cap DE$. Avem $TE < T_1E$. Aplicăm teorema lui Ceva şi rezultă $\frac{A'F}{A'E} \cdot \frac{TE}{TD} \cdot \frac{B'D}{B'F} = 1$, de unde deducem $\frac{TE}{TD} = \frac{1}{4}$, deci $\frac{T_1E}{T_1D} > \frac{TE}{TD} = \frac{1}{4}$. Folosind din nou teorema lui Ceva, obţinem $\frac{A_1'F}{A_1'E} \cdot \frac{T_1E}{T_1D} \cdot \frac{B_1'D}{B_1'F} = 1$, deci $\frac{B_1'D}{B_1'F} < 2$. Cu acelaşi raţionament deducem $\frac{C_1'E}{C_1'D} > 2$ şi apoi $\frac{A_1'F}{A_1'E} < 2$, fals. La fel, e imposibil să avem $\frac{A_1'F}{A_1'E} < 2$. Rezultă $\frac{A_1'F}{A_1'E} = 2$, deci $A_1' = A'$ şi analog, $B_1' = B'$ şi $C_1' = C'$, deci triunghiurile $A_1B_1C_1$ şi ABC coincid.

8. *Se consideră $n, k \in \mathbb{N}$, $3 \le k \le n$ şi mulţimea $V_n = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_n}\}$ cu elementele vectori distincţi, care au aceeaşi origine şi extremităţile coliniare, astfel încât oricare ar fi k vectori din V_n, există printre aceştia cel puţin o pereche de vectori care au acelaşi modul.*

a) Pentru $k = 5$, să se demonstreze că $n \in \{5, 6, 7, 8\}$.

b) Pentru $k = 5$, să se determine numărul mulţimilor V_6.

c) Să se determine numărul minim şi numărul maxim al perechilor de vectori cu modulele egale.

(*Dana Heuberger*)

Soluţie. Să observăm mai întâi că vectorii din V au cel mult $k - 1$ module distincte. Mai mult, nu e posibil ca mai mult de 2 vectori din V_n să aibă acelaşi modul (deoarece au extremităţile coliniare). Deducem că $2(k - 1) \ge n$, deci

$$k \ge \frac{n}{2} + 1. \tag{1}$$

Rezultă şi

$$k \ge n + 1 - \left[\frac{n}{2}\right]. \tag{2}$$

a) Pentru $k = 5$, există cel mult 4 module distincte. Din ipoteză avem că $n \ge k$, deci $n \ge 5$. Cum nu e posibil ca mai mult de 2 vectori din V_n să aibă acelaşi modul, rezultă $n \in \{5, 6, 7, 8\}$.

b) Dacă exact 3 module sunt distincte, rezultă o singură mulţime V_6, cu vectorii având doi câte doi acelaşi modul.

Dacă exact 4 module sunt distincte, celor 4 vectori de module diferite, $\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{u}_3, \overrightarrow{u}_4$, li se adaugă doi vectori, care trebuie să aibă respectiv modulul egal cu al unora dintre $\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{u}_3, \overrightarrow{u}_4$.

Există 6 posibilităţi de a alege 2 dintre cele 4 module diferite. În total, există 7 mulţimi V_6.

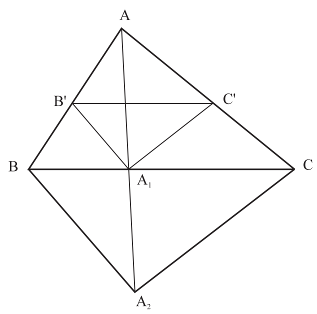
c) Notăm cu t numărul perechilor de vectori de module egale. Vectorii din mulţimea V_n au $n-t$ module diferite. Aşadar, $n-t \leq k-1$, adică $t \geq n-k+1$. Evident, $t \leq \left[\frac{n}{2}\right]$ şi $t \leq k-1$, deci $t \leq \min\left(k-1, \left[\frac{n}{2}\right]\right)$.

Din (1) deducem că $k-1 \geq \frac{n}{2} \geq \left[\frac{n}{2}\right]$, deci $\min\left(k-1, \left[\frac{n}{2}\right]\right) = \left[\frac{n}{2}\right]$. Folosind (2), obţinem că $t \in \left[n-k+1, \left[\frac{n}{2}\right]\right]$. Să observăm că pentru $k=5$ şi $n=6$, există mulţimi V_6 pentru care $t = n-k+1 = 2$ şi o mulţime V_6 pentru care $t = \left[\frac{n}{2}\right] = 3$.

9. *Pe laturile AB, AC, BC ale triunghiului ascuţitunghic ABC se consideră punctele B', C' şi A_1 astfel ca triunghiul $B'A_1C'$ să fie dreptunghic isoscel şi ipotenuza $B'C'$ că fie paralelă cu BC. Analog se definesc punctele $B_1 \in AC$ şi $C_1 \in AB$. Să se arate că dreptele AA_1, BB_1, CC_1 sunt concurente.*

(*Conf. dr. Vasile Pop,* Univ. Tehnică Cluj-Napoca)

Soluţie. Construim pe latura BC triunghiul dreptunghic isoscel BA_2C, cu BC ipotenuză şi notăm cu $\{A_1\} = AA_2 \cap BC$. Din A_1 ducem $A_1C' \| A_2C$ cu $C' \in AC$ şi $A_1B' \| A_2B$ cu $B' \in AB$.



Triunghiul $B'A_1C'$ este dreptunghic şi isoscel, deci punctele B', A_1, C' sunt cele definite în problemă. Evaluăm raportul

$$\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{A(ABA_2)}{(A(ACA_2)} = \frac{AB \cdot BA_2 \sin\left(B+\frac{\pi}{4}\right)}{AC \cdot CA_2 \sin\left(C+\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{AB \sin\left(B+\frac{\pi}{4}\right)}{AC \sin\left(C+\frac{\pi}{4}\right)}.$$

Analog deducem:

$$\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{BC\sin\left(C+\frac{\pi}{4}\right)}{BA\sin\left(A+\frac{\pi}{4}\right)} \qquad \text{şi} \qquad \frac{AC_1}{C_1B}=\frac{CA\sin\left(A+\frac{\pi}{4}\right)}{CB\sin\left(B+\frac{\pi}{4}\right)}.$$

Avem:

$$\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}\cdot\frac{AC_1}{C_1B}=1$$

şi conform teoremei lui Ceva, dreptele AA_1, BB_1 şi CC_1 sunt concurente.

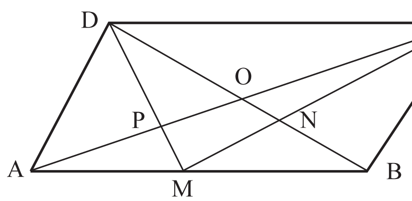
10. *Fie paralelogramul $ABCD$ şi punctul $M\in AB$, $\overrightarrow{AM}=k\cdot\overrightarrow{MB}$, $k>0$. Dreptele MC şi MD intersectează diagonalele BD şi AC în punctele N, respectiv P. Dacă O este centrul paralelogramului, să se exprime aria patrulaterului $MNOP$ în funcţie de k şi de aria S a paralelogramului.*

(*Ludovic Longaver,* Liceul "Németh László")

Soluţie. Aplicăm teorema lui Menelaus în triunghiul AOB, cu transversalele DM, respectiv CM.

$$\frac{DB}{DO}\cdot\frac{PO}{PA}\cdot\frac{MA}{MB}=1\Rightarrow\frac{PO}{PA}=\frac{1}{2k}\Rightarrow \text{aria}[POD] =\frac{1}{2k+1}\text{aria}[AOD]=\frac{S}{4(2k+1)}$$

$$\frac{CA}{CO}\cdot\frac{NO}{NB}\cdot\frac{MB}{MA}=1\Rightarrow\frac{NO}{NB}=\frac{k}{2}\Rightarrow \text{aria}[NOC] =\frac{k}{k+2}\text{aria}[BOC]=\frac{k\cdot S}{4(k+2)}.$$



$$\text{aria}[MNOP]=\text{aria}[DMC]-\text{aria}[DOC]-\text{aria}[POD]-\text{aria}[NOC]$$
$$=\frac{S}{2}-\frac{S}{4}-\frac{S}{4}\left(\frac{1}{2k+1}+\frac{k}{k+2}\right)=\frac{S}{4}\left(1-\frac{1}{2k+1}-\frac{k}{k+2}\right)$$
$$=\frac{S(2k^2+5k+2-k-2-2k^2-k)}{4(k+2)(2k+1)}=\frac{3k\cdot S}{4(k+2)(2k+1)}.$$

11. *Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{5x-3}{5-3x}} = \dfrac{5y^2+3}{3y^2+5} \\ \sqrt{\dfrac{5y-3}{5-3y}} = \dfrac{5z^2+3}{3z^2+5} \\ \sqrt{\dfrac{5z-3}{5-3z}} = \dfrac{5x^2+3}{3x^2+5} \end{cases}$$

(*Nicolae Muşuroia*)

Soluţie. Considerăm funcţia $f : \left[\frac{3}{5}, \frac{5}{3}\right) \to [0, \infty)$, $f(x) = \sqrt{\dfrac{5x-3}{5-3x}}$.

Se constată că f este bijecţie strict crescătoare şi că $f^{-1} : [0, \infty) \to \left[\frac{3}{5}, \frac{5}{3}\right)$, $f^{-1}(x) = \dfrac{5x^2+3}{3x^2+5}$. Sistemul devine:

$$\begin{cases} f(x) = f^{-1}(y) \\ f(y) = f^{-1}(z) \\ f(z) = f^{-1}(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(f(x)) = y \\ f(f(y)) = z \\ f(f(z)) = x \end{cases}$$

Fie $x \leq y \overset{f(x) \leq f(y)}{\Longrightarrow} f(f(x)) \leq f(f(y)) \Rightarrow y \leq z \Rightarrow f(y) \leq f(z) \Rightarrow f(f(y)) \leq f(f(z)) \Rightarrow z \leq x$. Deci $x \leq y \leq z \leq x$ şi prin urmare $x = y = z$. Atunci

$f(x) = f^{-1}(x) \overset{\text{f s.cresc.}}{\Longrightarrow} f(x) = x \Rightarrow \sqrt{\dfrac{5x-3}{5-3x}} = x \Rightarrow (x-1)(3x^2-2x+3) = 0 \Rightarrow x = 1$. Deci $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1. \end{cases}$

12. *Se consideră patrulaterul convex $ABCD$ de arie S, ale cărui diagonale formează un unghi de măsură α. Dacă M este mijlocul laturii $[CD]$, să se calculeze aria triunghiului $G_1G_2G_3$, unde G_1, G_2, G_3 sunt centrele de greutate ale triunghiurilor MAD, MAB, respectiv MBC.*

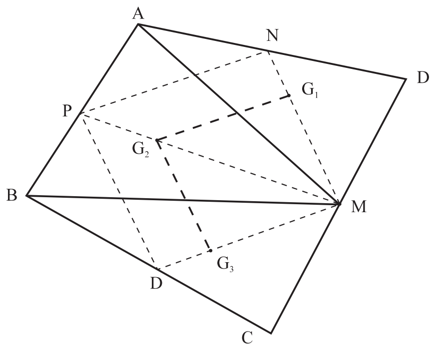
(*Nicolae Muşuroia*)

Soluţie. Fie N, P, Q mijloacele laturilor $[DA]$, $[AB]$, $[BC]$.

Atunci

$$PN \| BD, \quad PN = \frac{1}{2} BD$$

$$PQ \| AC, \quad PQ = \frac{1}{2} AC$$



$\dfrac{MG_1}{MN} = \dfrac{2}{3} = \dfrac{MG_2}{MP} \Rightarrow G_1G_2 \| PN$ şi $\dfrac{2}{3} = \dfrac{G_1G_2}{PN} = \dfrac{G_1G_2}{\frac{1}{2} BD}$. Deci $G_1G_2 = \dfrac{1}{3} BD$.
Analog $G_2G_3 = \dfrac{1}{3} AC$.

$$S_{G_1G_2G_3} = \frac{1}{2} G_2G_1 \cdot G_2G_3 \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} BD \cdot AC \sin\alpha = \frac{1}{18} S.$$

13. *Se consideră un triunghi ABC, (AD bisectoare cu $D \in (BC)$ şi punctele $M \in (AB)$, $N \in (AC)$ cu $MN \cap AD = \{L\}$. Notăm $\dfrac{AL}{AD} = \lambda$.*

a) Să se arate că $\dfrac{1}{AM} + \dfrac{1}{AN} = \dfrac{1}{\lambda}\left(\dfrac{1}{AB} + \dfrac{1}{AC}\right)$.

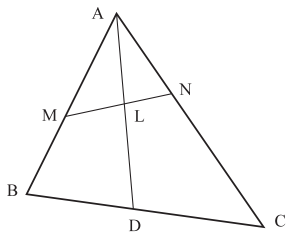
b) Să se arate că dacă I este centrul cercului înscris în triunghiul ABC, iar punctele M, I, N sunt coliniare, atunci $\dfrac{1}{AM} + \dfrac{1}{AN} = \dfrac{AB + BC + CA}{AB \cdot AC}$.

(*Nicolae Muşuroia*)

Soluţie. a) Notăm $\dfrac{MA}{AB} = \alpha$, $\dfrac{NA}{AC} = \beta$, $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$.

$$\overrightarrow{ML} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AL} = -\alpha\overrightarrow{AB} + \lambda\frac{b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}}{b+c} = \left(-\alpha + \frac{\lambda b}{b+c}\right)\overrightarrow{AB} + \frac{\lambda c}{b+c}\overrightarrow{AC}.$$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = -\alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}.$$



Punctele M, L, N fiind coliniare, rezultă $\dfrac{-\alpha + \frac{\lambda b}{b+c}}{-\alpha} = \dfrac{\frac{\lambda c}{b+c}}{\beta}$. Obţinem

$1 = \dfrac{\lambda b}{b+c} \cdot \dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{\lambda c}{b+c} \cdot \dfrac{1}{\beta} \Leftrightarrow 1 = \dfrac{\lambda}{b+c}\left(\dfrac{b}{\beta} + \dfrac{c}{\beta}\right) \Leftrightarrow 1 = \dfrac{\lambda bc}{b+c}\left(\dfrac{1}{MA} + \dfrac{1}{NA}\right)$.

Deci

$$\frac{1}{AM} + \frac{1}{AN} = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}\right). \tag{1}$$

b) Dacă punctele M, I, N sunt coliniare, atunci $L = I$ şi $\lambda = \dfrac{AI}{AD} = \dfrac{b+c}{a+b+c}$. Din (1) rezultă concluzia.

14. *Să se arate că:*

$\sqrt{a^3+1^3} + \sqrt{a^3+2^3} + \cdots + \sqrt{a^3+2009^3} \leq 2009\sqrt{a^3+2009\cdot 1005^2}$, $\forall\, a \in \mathbb{N}$.

(*Crina Petruţiu*)

Soluţie.

$$\left(\sqrt{a^3+1^3} + \sqrt{a^3+2^3} + \cdots + \sqrt{a^3+2009^3}\right)^2$$
$$\overset{C-B-S}{\leq} (1^2+1^2+\cdots+1^2)\left[(a^3+1^3)+(a^3+2^3)+\cdots+(a^3+2009^3)\right]$$
$$= 2009\left(2009a^3 + \frac{2009^2\cdot 2010^2}{4}\right) = 2009^2(a^3+2009\cdot 1005^2).$$

15. *Fie patrulaterul circumscriptibil $ABCD$, I, r centrul, respectiv raza cercului înscris în patrulater, iar s semiperimetrul patrulaterului. Să se arate că:*

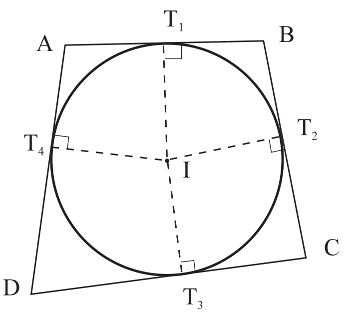
$$4r\sqrt{2} \leq \frac{(4r+s)\sqrt{2}}{2} \leq IA+IB+IC+ID.$$

(*Ovidiu Pop şi Nicuşor Minculete, C. N. "Mihai Eminescu" Satu Mare*)

Soluţie. Se ştie că într-un patrulater convex are loc inegalitatea

(1) $$s^2 \geq 4S,$$

unde $S =$ aria patrulaterului, cu egalitate dacă şi numai dacă patrulaterul este inscriptibil.



Avem

(2) $$AT_1 + IT_1 \leq IA\sqrt{2},$$

cu egalitate dacă triunghiul AT_1I este isoscel. Analog

(3) $$AT_4 + IT_4 \leq IA\sqrt{2}.$$

Din (2) şi (3) obţinem

(4) $$AT_1 + AT_4 + 2r \leq 2IA\sqrt{2}.$$

Considerând şi inegalităţile similare cu (4) pentru celelalte vârfuri, prin adunare obţinem inegalitatea:

$$\frac{(4r+s)\sqrt{2}}{2} \leq IA + IB + IC + ID.$$

Arătăm că $4r\sqrt{2} \leq \dfrac{(4r+s)\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 4r \leq s$. Cum $r = \dfrac{S}{s}$, trebuie demonstrat că $4S \leq s^2$, inegalitate adevărată conform (1).

Clasa a X-a

1. *Să se rezolve ecuaţia:*

$$\sqrt{1-\sqrt{x-2}} + 2 = \sqrt{x+1}.$$

($\boxed{\textit{Gheorghe Fătu}}$, C. N. "Gheorghe Şincai")

Soluţie. Condiţiile de existenţă: $x - 2 \geq 0$, $1 - \sqrt{x-2} \geq 0$ şi $x + 1 \geq 0$, ne dau $x \in [2, 3]$. Deoarece membrul stâng al ecuaţiei reprezintă o funcţie strict descrescătoare, iar membrul drept una strict crescătoare, ecuaţia are cel mult o soluţie. Cum $x = 3$ este soluţie, deducem că aceasta este unica soluţie a ecuaţiei.

2. *Să se arate că dacă* $a_1, a_2, a_3, a_4 \in (1, \infty)$, *atunci*

$$\log_{a_2}\frac{a_1+a_3}{2}\,\log_{a_3}\frac{a_2+a_4}{2}\,\log_{a_4}\frac{a_3+a_1}{2}\,\log_{a_1}\frac{a_4+a_2}{2} \geq 1.$$

(*Crina Petruţiu*)

Soluţie. Cu inegalitatea mediilor, avem

$$\log_{a_2}\left(\frac{a_1+a_3}{2}\right) \geq \log_{a_2}\sqrt{a_1a_3} = \frac{1}{2}\left(\log_{a_2}a_1+\log_{a_2}a_3\right) \geq \sqrt{\log_{a_2}a_1\cdot\log_{a_2}a_3}$$

şi analoagele.

Înmulţind relaţiile anterioare, se obţine concluzia problemei. Are loc egalitate dacă şi numai dacă $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$.

3. *Să se determine numerele* $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (1, \infty)$ *pentru care*

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n = 8 \\ \log_{x_1} 2 + \log_{x_2} 2 + \cdots + \log_{x_n} 2 = 3. \end{cases}$$

(*Ludovic Longaver,* Liceul "Németh László")

Soluţie. Logaritmăm prima relaţie şi obţinem sistemul

$$\begin{cases} \log_2 x_1 + \log_2 x_2 + \cdots + \log_2 x_n = 3 \\ \log_{x_1} 2 + \log_{x_2} 2 + \cdots + \log_{x_n} 2 = 3. \end{cases}$$

Utilizând inegalitatea de numere strict pozitive

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2,$$

obţinem că $n^2 \leq 9$, deci $n \in \{1, 2, 3\}$.

Pentru $n = 1$, sistemul nu are soluţie;

Pentru $n = 2$, obţinem că $\{x_1, x_2\} = \left\{2^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}; 2^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\right\}$;

Pentru $n = 3$, obţinem că $x_1 = x_2 = x_3 = 2$.

4. *Să se rezolve ecuaţia*

$$2^{x^2+1} + \log_2 x = 2^{x+\frac{1}{x}}, \quad x > 0.$$

(*Gheorghe Gherasin*, Liceul "Regele Ferdinand" Sighetu Marmaţiei)

Soluţie. Ecuaţia se scrie

$$2^{x^2+1}+\log_2\left(x+\frac{1}{x}\right)+\log_2 x = 2^{x+\frac{1}{x}}+\log_2\left(x+\frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow f(x^2+1) = f\left(x+\frac{1}{x}\right),$$

unde $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2^x + \log_2 x$.

Deoarece f este o funcţie strict crescătoare, deci injectivă, ecuaţia devine $x^2 + 1 = x + \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow x = 1$. Aşadar, $S = \{1\}$.

5. *În câte moduri putem alege patru numere din mulţimea*

$$X = \{1, 2, 3, 4, \ldots, 4n\}, \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

astfel încât suma lor să fie divizibilă prin 4.

(*Gheorghe Boroica*)

Soluţie. Considerăm mulţimile $A_i = \{x \in X | x \equiv i \pmod 4\}$, $i \in \{0, 1, 2, 3\}$. Aceste patru mulţimi au fiecare câte n elemente şi $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ este o partiţie a mulţimii X. Fie x, y, z, t patru elemente din mulţimea X.
Suma $x + y + z + t \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 4) \Leftrightarrow x, y, z, t \in A_0$, sau $x, y, z, t \in A_1$, sau $x, y, z, t \in A_2$, sau $x, y, z, t \in A_3$, sau două elemente sunt în A_0, unul în A_1 şi unul în A_3, sau două elemente sunt în A_0 şi două în A_2, sau un element este în A_0, un element în A_2 şi două elemente în A_3.

Atunci numărul cerut este

$$C_n^4 + C_n^4 + C_n^4 + C_n^4 + C_n^2 \cdot n \cdot n + C_n^2 \cdot C_n^2 + n \cdot n \cdot C_n^2 = 4C_n^4 + 2n^2 \cdot C_n^2 + (C_n^2)^2,$$

dacă $n \geq 4$.

Pentru $n = 3$, avem $9 \cdot C_3^2 + (C_3^2)^2 + 9 \cdot C_3^2 = 63$ posibilităţi;
Pentru $n = 2$, avem $4 + 1 + 4 = 9$ posibilităţi;
Pentru $n = 1$, avem o singură posibilitate.

6. *Fie $a, b, c, d \in (0, \infty)$ cu $abcd = 1$. Să se arate că:*

$$\frac{a^n}{1 + a + ab + abc} + \frac{b^n}{1 + b + bc + bcd} + \frac{c^n}{1 + c + cd + cda} + \frac{d^n}{1 + d + da + dab} \geq 1, \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$$

(*Gheorghe Boroica*)

Soluţie. Considerăm numerele

$$\alpha = \frac{1}{1 + a + ab + abc}, \quad \beta = \frac{1}{1 + b + bc + bcd} = \frac{1}{b(1 + c + cd + cda)},$$

$$\gamma = \frac{1}{1 + c + cd + cda} = \frac{1}{c(1 + d + da + dab)} \quad \text{şi}$$

$$\delta = \frac{1}{1 + d + da + dab} = \frac{1}{d(1 + a + ab + abc)}.$$

Atunci $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$ şi $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 1$. Funcţia $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$ fiind convexă, cu inegalitatea lui Jensen, obţinem

$$f(\alpha \cdot a + \beta \cdot b + \gamma \cdot c + \delta \cdot d) \leq \alpha \cdot f(a) + \beta \cdot f(b) + \gamma \cdot f(c) + \delta \cdot f(d)$$
$$\Leftrightarrow f(1) \leq S \Leftrightarrow 1 \leq S,$$

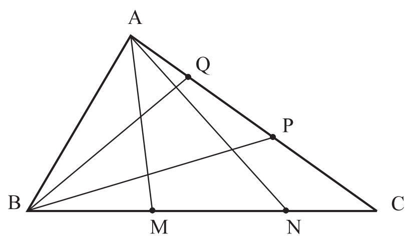
ceea ce trebuia demonstrat (S reprezintă membrul stâng al inegalităţii de demonstrat).

7. *Se consideră triunghiul ABC şi punctele distincte $M, N \in (BC)$, $P, Q \in (CA)$, astfel încât $\dfrac{BM}{MC} = \dfrac{CP}{PA} = k$ şi $\dfrac{BN}{NC} = \dfrac{CQ}{QA} = t$, cu $k \neq t$. Să se arate că $\triangle AMN \sim \triangle BPQ \Leftrightarrow \triangle ABC$ este echilateral.*

(*Dana Heuberger*)

Soluţie. Se cunoaşte proprietatea:

P. $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \Leftrightarrow \dfrac{b-a}{c-a} = \dfrac{b'-a'}{c'-a'} \Leftrightarrow a(b'-c')+b(c'-a')+c(a'-b') = 0$, unde $a, b, c, a', b', c' \in \mathbb{C}$ sunt respectiv afixele punctelor A, B, C, A', B', C'.



" $\Leftarrow$ " Evident.

" $\Rightarrow$ " Fie a, b, c, m, n, p, q, respectiv afixele punctelor A, B, C, M, N, P, Q. Avem

$$\triangle AMN \sim \triangle BPQ \Leftrightarrow a(p-q) + m(q-b) + n(b-p) = 0. \tag{1}$$

Înlocuim în relaţia (1) $m = \dfrac{b + k \cdot c}{1+k}$, $p = \dfrac{c + k \cdot a}{1+k}$, $n = \dfrac{b + t \cdot c}{1+t}$ şi $q = \dfrac{c + t \cdot a}{1+t}$. După unele calcule, obţinem

$$(k-t)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc) = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc,$$

deci $\triangle ABC$ este echilateral.

8. *Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ astfel încât $\overline{z}_1 = z_2 + z_3$ şi $\overline{z}_2 = z_3 + z_1$. Să se arate că $Re\, z_1 = Re\, z_2$ şi $Re\, z_3 = 0$.*

(*Ovidiu Pop* , C. N. "Mihai Eminescu" Satu Mare)

Soluţie. Din identităţile din enunţ rezultă că $\overline{z}_1+z_1 = z_1+z_2+z_3$ şi $\overline{z}_2+z_2 = z_1+z_2+z_3$, de unde $\overline{z}_1+z_1 = \overline{z}_2+z_2$, deci $Re\, z_1 = Re\, z_2$.
Din $\overline{z}_1+z_1 = z_1+z_2+z_3$ rezultă că $z_1+z_2+z_3 \in \mathbb{R}$, echivalent cu $z_1+z_2+z_3 = \overline{z}_1+\overline{z}_2+\overline{z}_3$. Dar $\overline{z}_1+\overline{z}_2 = (z_1+z_2+z_3)+z_3$ şi atunci avem $z_3+\overline{z}_3 = 0$, adică $Re\, z_3 = 0$.

9. *Pe laturile AB, BC, CA ale triunghiului ABC se consideră punctele M, N, respectiv P, astfel încât $\dfrac{AM}{MB} = \dfrac{BN}{NC} = \dfrac{CP}{PA} = k \neq 1$. Pe segmentele (AN), (BP), (CM) se consideră punctele E, F, respectiv G, astfel încât $\dfrac{AE}{EN} = \dfrac{BF}{FP} = \dfrac{CG}{GM} = k+1$. Să se demonstreze că triunghiurile ABC şi EFG sunt asemenea.*

(*Florin Bojor*)

Soluţie. Fie x afixul punctului X din plan. Atunci avem

$$m = \frac{a+k\cdot b}{1+k}\,,\; n = \frac{b+k\cdot c}{1+k}\,,\; p = \frac{c+k\cdot a}{1+k}\,.$$

Atunci

$$e = \frac{a+(k+1)n}{k+2} = \frac{a+b+k\cdot c}{2+k},\quad f = \frac{b+c+k\cdot a}{k+2} \quad \text{şi} \quad g = \frac{c+a+k\cdot b}{k+2}\,.$$

Vom obţine

$$EF = |f-e| = \frac{|k-1|\cdot|a-c|}{2+k} = \frac{|k-1|}{2+k}\cdot AC$$

şi analoagele, de unde rezultă concluzia problemei.

10. *Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ cu $a_1 > 0$ şi raţia $r > 0$. Definim numerele complexe $z_k = (1+a_k a_{k+1}) + ri$, $k = \overline{1,n}$. Să se arate că $Re\,(z_1 z_2 \dots z_n) > 0$ şi $Im(z_1 z_2 \dots z_n) > 0$.*

(*Nicolae Muşuroia şi Ion Savu*)

Soluţie. Fie $r_k = |z_k| = \sqrt{(1+a_k\cdot a_{k+1})^2 + r^2}$, $k \in \overline{1,n}$ şi $z_k = r_k(\cos\alpha_k + i\sin\alpha_k)$, unde $\cos\alpha_k = \dfrac{1+a_k\cdot a_{k+1}}{r_k} > 0$, $\sin\alpha_k = \dfrac{r}{r_k} > 0$.
Atunci $\operatorname{tg}\alpha_k = \dfrac{r}{1+a_k a_{k+1}} > 0$ şi $\alpha_k = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{r}{1+a_k a_{k+1}}\right) \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Se ştie că dacă $x > y > 0$, atunci $\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{x-y}{1+xy}\right)$. Atunci

$$\alpha_k = \operatorname{arctg}\left(\frac{a_{k+1}-a_k}{1+a_k\cdot a_{k+1}}\right) = \operatorname{arctg} a_{k+1} - \operatorname{arctg} a_k, \quad k \in \overline{1,n}.$$

Aşadar,

$$\begin{aligned} z = z_1z_2\ldots z_n &= r_1r_2\ldots r_n[\cos(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n]+i\sin(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)] \\ &= r_1r_2\ldots r_n[\cos(\operatorname{arctg} a_{n+1} - \operatorname{arctg} a_1) + i\sin(\operatorname{arctg} a_{n+1} - \operatorname{arctg} a_1)]. \end{aligned}$$

Rezultă că $Re\,(z) > 0$ şi $Im(z) > 0$, deoarece $0 < \operatorname{arctg} a_{n+1} - \operatorname{arctg} a_1 < \dfrac{\pi}{2}$.

11. *Se consideră $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, $\varepsilon \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, $\varepsilon^3 = 1$. Să se arate că dacă $|a + b\varepsilon + c\varepsilon^2| \leq |a|$, atunci ecuaţia $az^2 + bz + c = 0$ are cel puţin o soluţie z cu $|z| \leq 2$.*

(*Nicolae Muşuroia*)

Soluţie. Relaţia din ipoteză se scrie

$$\begin{aligned} &\left|1+\frac{b}{a}\varepsilon+\frac{c}{a}\varepsilon^2\right| \leq 1 \Leftrightarrow |1-(z_1+z_2)\varepsilon + z_1z_2\varepsilon^2| \leq 1 \\ &\Leftrightarrow |(1-z_1\varepsilon)\cdot(1-z_2\varepsilon)| \leq 1 \Leftrightarrow |1-z_1\varepsilon|\cdot|1-z_2\varepsilon| \leq 1. \end{aligned}$$

Atunci cel puţin unul dintre numerele $|1-z_1\varepsilon|$ şi $1-z_3\varepsilon|$ este subunitar. Fie $|1-z_1\varepsilon| \leq 1$. Atunci

$$|\varepsilon^3 - z_1\varepsilon| \leq 1 \Leftrightarrow |\varepsilon|\cdot|\varepsilon^2 - z_1| \leq 1 \Leftrightarrow |\varepsilon^2 - z_1| \leq 1.$$

Aşadar,

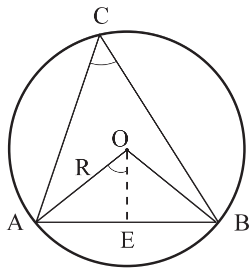
$$|z_1| = |z_1 - \varepsilon^2 + \varepsilon^2| \leq |z_1 - \varepsilon^2| + |\varepsilon^2| \leq 1 + 1 = 2,$$

deci are loc concluzia.

12. *Se consideră triunghiul ascuţitunghic ABC înscris în $C(O, R)$ şi cu afixele vârfurilor z_A, z_B, respectiv z_C. Să se arate că dacă $\sum\left|\dfrac{z_A+z_B}{z_A-z_B}\right| = \sqrt{3}$, atunci triunghiul ABC este echilateral.*

(*Nicolae Muşuroia*)

Soluţie. *Metoda I.* Faţă de un reper cu originea în centrul cercului circumscris, avem $z_A + z_B = 2\cdot z_E$, unde E este mijlocul lui AB.



În $\triangle AOE$, $\cos C = \dfrac{OE}{R}$, deci $OE = R\cdot\cos C = \left|\dfrac{z_A+z_B}{2}\right|$. Atunci

$$\begin{aligned}\sqrt{3} &= \sum\left|\frac{z_A+z_B}{z_A-z_B}\right| = \sum\frac{2R\cdot\cos C}{AB} = \sum\frac{2R\cos C}{2R\sin C}\\ &= \sum\operatorname{ctg} C = \operatorname{ctg} A+\operatorname{ctg} B+\operatorname{ctg} C.\end{aligned}$$

Dar

$$\begin{aligned}\operatorname{ctg} A+\operatorname{ctg} B &= \frac{\sin(A+B)}{\sin A\cdot\sin B} = \frac{2\sin C}{\cos(A-B)-\cos(A+B)}\\ &= \frac{2\sin C}{\cos(A-B)+\cos C} \geq \frac{2\sin C}{1+\cos C} = 2\operatorname{tg}\left(\frac{C}{2}\right), \qquad (1)\end{aligned}$$

cu egalitate pentru $A=B$.

Aşadar,

$$\begin{aligned}\sqrt{3} &= \operatorname{ctg} A+\operatorname{ctg} B+\operatorname{ctg} C \overset{(1)}{\geq} 2\operatorname{tg}\frac{C}{2}+\operatorname{ctg} C = \frac{2}{\operatorname{ctg}\frac{C}{2}}+\frac{\operatorname{ctg}^2\frac{C}{2}-1}{2\operatorname{ctg}\frac{C}{2}}\\ &= \frac{3+\operatorname{ctg}^2\left(\frac{C}{2}\right)}{2\operatorname{ctg}\frac{C}{2}} = \frac{1}{2}\left(\operatorname{ctg}\frac{C}{2}+3\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right) \geq \sqrt{\operatorname{ctg}\frac{C}{2}\cdot 3\operatorname{tg}\frac{C}{2}} = \sqrt{3},\end{aligned}$$

cu egalitate pentru $A=B$ şi $C=\dfrac{\pi}{3}$, deci $\triangle ABC$ este echilateral.

Metoda a II-a. Aplicând inegalitatea lui Jensen funcţiei strict convexe $f:\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{ctg} x$, avem

$$\sum\left|\frac{z_A+z_B}{z_A-z_B}\right| = \sum\operatorname{ctg} A \geq 3\operatorname{ctg}\left(\frac{A+B+C}{3}\right) = 3\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3},$$

cu egalitate dacă $A=B=C$, adică triunghiul ABC este echilateral.

13. *Se consideră tetraedrul echifacial $ABCD$ cu $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, $AC = e$, $BD = f$. Să se arate că dacă*

$$\frac{a+b+c+d}{e+f} \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{a+c+e+f}{b+d} \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{b+d+e+f}{a+c} \in \mathbb{N}^*,$$

atunci tetraedrul este regulat.

(*Nicolae Muşuroia*)

Soluţie. Din $e < c+d$ şi $e < a+d$ rezultă că $2e < a+b+c+d$. Analog, din $f < b+c$ şi $f < a+d$ rezultă că $2f < a+b+c+d$. Obţinem $e+f < a+b+c+d$, deci $\dfrac{a+b+c+d}{e+f} > 1$. Cum $\dfrac{a+b+c+d}{e+f} \in \mathbb{N}^*$, rezultă că $\dfrac{a+b+c+d}{e+f} \geq 2$, adică

$$a+b+c+d \geq 2e+2f. \tag{1}$$

Analog obţinem relaţiile

$$a+c+e+f \geq 2b+2d, \tag{2}$$

$$b+d+e+f \geq 2a+2c. \tag{3}$$

Presupunând că cel puţin una din inegalităţile (1), (2) sau (3) este strictă, adunându-le obţinem contradicţia $a+b+c+d+e+f > a+b+c+d+e+f$. Deci

$$a+b+c+d = 2e+2f, \tag{4}$$

$$a+c+e+f = 2b+2d, \tag{5}$$

$$b+d+e+f = 2a+2c. \tag{6}$$

Din (4) scădem (5), din (5) scădem (6) şi obţinem $\begin{cases} b+d = e+f \\ a+c = b+d \end{cases}$, deci $a+c = b+d = e+f$. Tetraedrul fiind echifacial, avem: $a = c$, $b = d$, $e = f$. Obţinem $a = b = c = d = e = f$, deci tetraedrul este regulat.

14. *În tetraedrul $[ABCD]$ tridreptunghic în A notăm cu S_A aria feţei opuse a vârfului A şi analoagele S_B, S_C, S_D. Să se arate că*

$$\frac{1}{mS_B^2+nS_C^2} + \frac{4}{mS_C^2+nS_D^2} + \frac{9}{mS_D^2+nS_B^2} \geq \frac{36}{(m+n)S_A^2}, \quad \forall\, m,n \in (0,\infty).$$

(*D. M. Bătineţu-Giurgiu*)

Soluţie. Se ştie că dacă $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ şi $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in (0, \infty)$, $n \in \mathbb{N}^*$, atunci avem $\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{\alpha_i} \geq \frac{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}$ (inegalitatea $C - B - S$, forma Titu Andreescu). De asemenea, $S_A^2 = S_B^2 + S_C^2 + S_D^2$. Atunci rezultă că

$$\frac{1}{mS_B^2 + nS_C^2} + \frac{4}{mS_c^2 + nS_D^2} + \frac{9}{mS_D^2 + nS_B^2}$$
$$\geq \frac{(1+2+3)^2}{m(S_B^2 + S_C^2 + S_D^2) + n(S_C^2 + S_D^2 + S_B^2)} = \frac{36}{(m+n)S_A^2},$$

deci are loc concluzia problemei.

15. *În câte moduri putem ajunge în vârful unei scări ce are zece trepte, dacă putem urca una, sau două, sau trei trepte o dată?*

(*Gheorghe Boroica*)

Fie x_n numărul de posibilităţi de a urca o scară cu n trepte. Deoarece $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 4$, $x_4 = 7 = x_1 + x_2 + x_3$, se deduce formula de recurenţă $x_n = x_{n-1} + x_{n-2} + x_{n-3}$, $n \geq 4$. Atunci şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ are termenii iniţiali $1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, 149, 274, \ldots$, deci $x_{10} = 274$.

Clasa a XI-a

1. *Se consideră matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}$, unde $a_{ij} = (-1)^{i+j}(i+j)$, $\forall\, i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.*

a) Să se calculeze suma elementelor matricei A.

b) Să se calculeze $\det(A)$ *şi* $Tr(A^2)$.

(*Traian Covaciu*, Colegiul Naţional "Vasile Lucaciu")

Soluţie. a) *Cazul I.* Dacă $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}^*$, atunci, calculând suma elementelor matricei $B = \begin{pmatrix} a_{2m2p} & a_{2m2p+1} \\ a_{2m+12p} & a_{2m+12p+1} \end{pmatrix}$, vom obţine 0 pentru orice $m, p \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Atunci suma elemetelor matricei A este 0.

Cazul II. Dacă $n = 2k+1$, atunci matricea A va avea suma elementelor aflate la intersecţia primelor $2k$ linii şi $2k$ coloane 0, conform cazului I. Atunci suma elementelor matricei A va fi egală cu suma elementelor de pe ultima linie şi ultima coloană, care va fi $2k+2$.

b) Pentru $n = 1$ avem $\det(A) = 2$, pentru $n = 2$ avem $\det(A) = -1$, iar pentru $n \geq 3$ avem $\det(A) = 0$, deoarece $\ell_1 + 2\ell_2 + \ell_3 = 0$.

2. *Să se arate că dacă $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ cu $Tr(A) = 0$, atunci*

$$\sum_{k=0}^{2} \det(A^2 + \varepsilon_k \cdot A + \varepsilon_k^2 \cdot I_2) = 3\det^2(A),$$

unde $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ sunt rădăcinile de ordinul trei ale unităţii.

(*Nicolae Muşuroia*)

Soluţie. Deoarece $A^2 - Tr(A) \cdot A + \det(A) \cdot I_2 = O_2$, vom avea $a^2 = -\delta I_2$, unde $\delta = \det(A)$, iar polinomul caracteristic al matricei A este $f = X^2 + \delta$. Atunci

$$\sum_{k=0}^{2} \det(A^2 + \varepsilon_k A + \varepsilon_k^2 I_2) = \sum_{k=0}^{2} \det(\varepsilon_k A + (\varepsilon_k^2 - \delta) I_2$$
$$= \sum_{k=0}^{2} \varepsilon_k^2 \det\left(A - \frac{\delta - \varepsilon_k^2}{\varepsilon_k} I_2\right) = \sum_{k=0}^{2} \varepsilon_k^2 f\left(\frac{\delta - \varepsilon_k^2}{\varepsilon_k}\right)$$
$$= \sum_{k=0}^{2} (\delta^2 + \varepsilon_k - \delta\varepsilon_k^2) = 3\delta^2.$$

3. *Se consideră $n \in \mathbb{N}^*$ şi $M = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A^3 + 4A - I_n = O_n\}$. Să se arate că:*

a) $M \neq \emptyset$;

b) dacă $A \in M$, atunci $\det(I_n + \alpha A) \geq 0$, $\forall\, \alpha \geq -4$.

(*Gheorghe Boroica*)

Soluţie. a) Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 4x - 1$ este continuă şi bijectivă. Atunci ecuaţia $f(x) = 0$ are o unică soluţie reală, x_0. Se verifică faptul că matricea $A = x_0 \cdot I_n$ aparţine mulţimii M.

b) Dacă $A \in M$, atunci $I_n = A(A^2 + 4I_n)$, de unde $1 = \det(A) \cdot \det(A^2 + 4I_n)$. Cum $\det(A^2 + (2I_n)^2) \geq 0$, vom deduce că

$$\det(A) > 0. \tag{1}$$

Avem

$$\det(I_n + \alpha A) = \det(A^3 + (4 + \alpha)A) = \det(A) \cdot \det\left(A^2 + \left(\sqrt{\alpha + 4} \cdot I_n\right)^2\right) \geq 0.$$

4. *Se consideră cunoscută convergenţa către $s = -1,4553...$ a şirului lui A. G. Ioachimescu, $(s_n)_{n\geq 1}$, $s_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$. Demonstraţi* *că şirul* $(x_n)_{n\geq 1}$ *definit prin relaţia* $s = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - x_n \cdot \sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, *este convergent şi calculaţi apoi* $\lim\limits_{n\to\infty}(1 + x_n - x)^n$, *unde* $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

(*D. M. Bătineţu-Giurgiu*)

Soluţie. Se observă că $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - s\right)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, de unde, aplicând Lema lui Stolz-Cesaro, vom obţine $x = 2$. Avem de calculat $\lim\limits_{n\to\infty}(1 + x_n - 2)^n = e^{\lim\limits_{n\to\infty} n(x_n-2)}$. Observăm că

$$s = -x_n\sqrt{n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} = \sqrt{n}(2 - x_n) + s_n,$$

de unde $n(x_n - 2) = \sqrt{n}(s_n - s)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Deci

$$\lim_{n\to\infty} n(x_n - 2) = \lim_{n\to\infty} \frac{s_n - s}{\frac{1}{\sqrt{n}}} \overset{SC}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{n\to\infty} \frac{s_{n+1} - s_n}{\sqrt{n} - \sqrt{n+1}} \sqrt{n(n+1)},$$

de unde vom obţine că limita cerută este $\sqrt{e}$.

5. *Fie* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *două funcţii continue, bijective, cu proprietatea că* $f(x) + g(x) = 2$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. *Să se arate că există un singur* $x_0 \in \mathbb{R}$ *astfel încât* $(f(x_0))^n + (g(x_0))^n = 2$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

(*Gheorghe Fătu* , C. N. "Gheorghe Şincai")

Soluţie. Din surjectivitatea funcţiei f rezultă că există $x_0 \in \mathbb{R}$, astfel încât $f(x_0) = 1$ şi atunci, din relaţia din ipoteză, rezultă că $g(x_0) = 1$, deci

$$(f(x_0))^n + (g(x_0))^n = 2, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Demonstrăm că x_0 este unic. Presupunem prin reducere la absurd că există $x_1 \in \mathbb{R}\backslash\{x_0\}$, astfel încât $(f(x_1))^n + (g(x_1))^n = 2$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

a) Dacă $f(x_1) \neq 1$, atunci din relaţia $f(x_1) + g(x_1) = 2$ va rezulta că cel puţin unul dintre numerele $|f(x_1)|$ şi $|g(x_1)|$ este supraunitar, deci trecând la limită în relaţia $(f(x_1))^{2n} + (g(x_1))^{2n} = 2$ vom obţine $\infty = 2(F)$.

b) Dacă $f(x_1) = 1$, atunci rezultă că $f(x_1) = f(x_0)$ şi din injectivitatea funcţiei f rezultă că $x_1 = x_0(F)$. De unde rezultă unicitatea.

6. *Se consideră şirul* $(x_n)_{n\geq 0}$*, unde* $x_0 \in [-1,\infty)$ *şi* $x_{n+1} = \sqrt{x_n+10} - \sqrt{x_n+17}$*,* $\forall n \in \mathbb{N}$*. Să se demonstreze că şirul este convergent şi calculaţi limita sa.*

(*Margareta Trif, Colegiul Economic "Nicolae Titulescu"*)

Soluţie. $x_1 = \sqrt{x_0+10} - \sqrt{x_0+17} = \dfrac{-7}{\sqrt{x_0+10}+\sqrt{x_0+17}} \geq -1$ şi prin inducţie se demonstrează că $x_n \geq -1$, $\forall n \geq 0$. Avem

$$\begin{aligned}|x_{n+1}+1| &= \left|\left(\sqrt{x_n+10}-3\right) - \left(\sqrt{x_n+17}-4\right)\right| \\ &\leq \left|\sqrt{x_n+10}-3\right| + \left|\sqrt{x_n+17}-4\right| \\ &= \frac{|x_n+1|}{\sqrt{x_n+10}+3} + \frac{|x_n+1|}{\sqrt{x_n+17}+4} \leq \frac{7}{12}\,|x_n+1|.\end{aligned}$$

În consecinţă, $|x_{n+1}+1| \leq \dfrac{7}{12}|x_n+1|$, $\forall n \in \mathbb{N}$, de unde, prin inducţie, rezultă că

$$|x_n+1| \leq \left(\frac{7}{12}\right)^n |x_0+1| \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |x_n+1| = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = -1.$$

7. *Fie* $(x_n)_{n\geq 0}$ *un şir definit prin* $x_0 \in \mathbb{R}$ *şi* $x_{n+1} = x_n - \dfrac{1}{2}\ln(1+e^{2x_n})$*,* $\forall n \in \mathbb{N}$*.*

a) Determinaţi termenul general al şirului.

b) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$*.*

(*Eliza Mastan şi Ludovic Longaver*, Liceul "Németh László")

Soluţie. a) Relaţia de recurenţă se scrie $x_{n+1} = \ln \dfrac{e^{x_n}}{\sqrt{1+e^{2x_n}}}$, $n \in \mathbb{N}$, deci $x_1 = \ln \dfrac{e^{x_0}}{\sqrt{1+e^{2x_0}}}$, $x_2 = \dfrac{e^{x_1}}{\sqrt{1+e^{2x_1}}} = \ln \dfrac{e^{x_0}}{\sqrt{1+2e^{2x_0}}}$, de unde, prin inducţie, rezultă că $x_n = \ln \dfrac{e^{x_0}}{\sqrt{1+ne^{2x_0}}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

b) Trecând la limită în relaţia anterioară, vom obţine $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

8. *Fie* $0 < a < b$*. Să se studieze convergenţa şirului* $(x_n)_{n\geq 0}$ *pentru care* $a < x_n < b$ *şi* $\dfrac{1}{x_n-a} - \dfrac{1}{x_{n+1}-b} \leq \dfrac{4}{b-a}$*,* $\forall n \in \mathbb{N}$*. Să se calculeze limita* *acestui şir în cazul în care aceasta există.*

(Ludovic Longaver, *Liceul "Németh László"*)

Soluţie. Din ipoteză şirul este mărginit. Aplicând inegalitatea dintre media armonică şi cea aritmetică, vom obţine

$$\frac{4}{b-a} \geq \frac{1}{x_n - a} + \frac{1}{b - x_{n+1}} \geq \frac{4}{x_n - a + b - x_{n+1}},$$

de unde $x_{n+1} - x_n \leq 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, deci şirul este convergent. Notăm $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \ell$ şi trecem la limită în inegalitatea din ipoteză. Vom obţine $\dfrac{1}{\ell - a} + \dfrac{1}{b-\ell} \leq \dfrac{4}{b-a}$. Aplicând inegalitatea dintre media armonică şi cea aritmetică, vom obţine $\dfrac{1}{\ell - a} + \dfrac{1}{b-\ell} \leq \dfrac{4}{b-a}$, adică

$$\frac{1}{\ell - a} + \frac{1}{b-\ell} = \frac{4}{b-a} \Rightarrow \ell - a = b - \ell \Rightarrow \ell = \frac{a+b}{2}.$$

9. *Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ cu $a_1 = \sqrt{2}$ şi $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$. Să se calculeze*

$$\lim_{n\to\infty} 4^n \left(\left(\frac{a_n}{2}\right)^{4^n} - e^{-\frac{\pi^2}{8}} \right).$$

(*Nicolae Muşuroia*)

Soluţie. Prin inducţie se demonstrează că $a_n = 2\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Atunci

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{2}\right)^{4^n} &= \lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)^{4^n} \overset{1^\infty}{=} \lim_{n\to\infty} e^{4^n\left(\cos\frac{\pi}{2^{n+1}} - 1\right)} \\ &= \lim_{n\to\infty} e^{4^n\left(-2\sin^2\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)} = e^{-\frac{\pi^2}{8}}.\end{aligned}$$

Avem că:

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty} 4^n\left(\left(\frac{a_n}{2}\right)^{4^n} - e^{-\frac{\pi^2}{8}}\right) \overset{\infty\cdot 0}{=} \lim_{n\to\infty} 4^n\left(e^{4^n \ln\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}} - e^{-\frac{\pi^2}{8}}\right) \\ &= e^{-\frac{\pi^2}{8}} \lim_{n\to\infty} 4^n \frac{e^{4^n\ln\cos\frac{\pi}{2^{n+1}} + \frac{\pi^2}{8}} - 1}{4^n \ln\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}} + \dfrac{\pi^2}{8}}\left(4^n\ln\cos\frac{\pi}{2^{n+1}} + \frac{\pi^2}{8}\right) \\ &= e^{-\frac{\pi^2}{8}} \lim_{n\to\infty} 2^{4n}\left(\ln\cos\frac{\pi}{2\cdot 2^n} + \frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{2^n}\right)^2\right).\end{aligned}$$

Folosind regula lui L'Hospital avem $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln\cos\frac{x}{2} + \frac{1}{8}x^2}{x^4} = -\dfrac{1}{192}$, deci limita cerută va fi $-\dfrac{\pi^4}{192} e^{-\frac{\pi^2}{8}}$.

10. *Să se calculeze*

$$\lim_{n\to\infty}\left(e^{\frac{1}{n+2}\sum\limits_{k=1}^{n+1} H_k} - e^{\frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=1}^{n} H_k}\right)$$

unde $H_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

(*Nicolae Muşuroia*)

Soluţie. Prin inducţie se demonstrează că $\sum\limits_{k=1}^{n} H_k = (n+1)(H_{n+1}-1)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Atunci

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(e^{\frac{1}{n+2}\sum\limits_{k=1}^{n+1} H_k} - e^{\frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=1}^{n} H_k}\right) &= \lim_{n\to\infty}\left(e^{H_{n+2}-1} - e^{H_{n+1}-1}\right)\\
&= \frac{1}{e}\lim_{n\to\infty} e^{H_{n+1}}\left(e^{H_{n+2}-H_{n+1}} - 1\right)\\
&= \frac{1}{e}\lim_{n\to\infty} e^{H_{n+1}-\ln(n+1)}(n+1)\frac{e^{\frac{1}{n+2}} - 1}{\frac{1}{n+2}} \cdot \frac{1}{n+2} = e^{c-1},
\end{aligned}$$

unde $c = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n} - \ln n\right)$.

11. *Calculaţi*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n-1}}\right)\right).$$

(*Cristian Heuberger*)

Soluţie. Se consideră cunoscut faptul că şirul $(c_n)_{n\geq 1}$, definit de termenul general $c_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n} - \ln n$ este convergent la constanta lui Euler c.

Atunci

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}=\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n}-\ln(2n)\right]$$
$$-\left[\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)\right]+\ln\left(2\sqrt{n}\right)$$
$$=c_{2n}-\frac{1}{2}\,c_n+\ln 2+\ln\sqrt{n}.$$

Dacă notăm x_n termenul general al şirului din problemă, atunci

$$x_n=\left(c_{2n}-\frac{1}{2}\,c_n+\ln 2+\ln\sqrt{n}\right)-\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n-1}}\right)$$
$$=c_{2n}-\frac{1}{2}\,c_n+\ln 2+\ln\frac{\sqrt{n}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n-1}}}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\ln\frac{\sqrt{n}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n-1}}}\overset{C.S.}{=}\lim_{n\to\infty}\ln\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\frac{1}{\sqrt{2n+1}}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\ln\frac{\sqrt{2n+1}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\ln\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Se obţine imediat

$$\lim_{n\to\infty}x_n=c-\frac{1}{2}\,c+\ln 2+\ln\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}\,(c+\ln 2).$$

12. *Determinaţi funcţiile derivabile* $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ *astfel încât pentru orice* $x>0$ *să aibă loc egalitatea* $\left(\frac{1}{x}f(x)\right)'=\frac{1}{x^2}\left(1+f\left(\frac{1}{x}\right)\right)$.

(*Cristian Heuberger*)

Soluţie. Identitatea dată se poate scrie succesiv astfel:

$$\frac{1}{x}\,f'(x)-\frac{1}{x^2}\,f(x)=\frac{1}{x^2}\left(1+f\left(\frac{1}{x}\right)\right),\quad\forall\,x>0;$$
$$\frac{1}{x}\,f'(x)=\frac{1}{x^2}\left(1+f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)\right),\quad\forall\,x>0;$$

(1) $$x\cdot f'(x)=1+f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right),\quad\forall\,x>0.$$

Înlocuind x cu $\frac{1}{x}$ obţinem $\frac{1}{x}f'\left(\frac{1}{x}\right)=1+f\left(\frac{1}{x}\right)+f(x), \forall\, x>0$. Rezultă imediat egalitatea $x\cdot f'(x)=\frac{1}{x}f'\left(\frac{1}{x}\right), \forall\, x>0$, şi de aici $f'(x)-\frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right)=0, \forall\, x>0$. Deducem că $\left(f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)\right)'=0$, $\forall\, x>0$, rezultând că există $\alpha\in\mathbb{R}$ astfel încât $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\alpha$, $\forall\, x>0$.

Înlocuind în relaţia (1), obţinem $x\cdot f'(x)=1+\alpha$, $\forall\, x>0$, şi de aici există $\beta\in\mathbb{R}$ astfel încât $f(x)=(1+\alpha)\ln x+\beta$, $\forall\, x>0$.

Din egalitatea dată în problemă, prin înlocuire, se deduce imediat $\alpha=2\beta$.

Dacă notăm $1+\alpha=\lambda$, rezultă $f(x)=\lambda\cdot\ln x+\frac{\lambda-1}{2}$, $\forall\, x>0$, unde λ este un număr real oarecare.

13. *Să se determine funcţiile derivabile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ care verifică relaţia:*

$$f(x+y)=e^{5x}f(y)+e^{2y}f(x),\quad \forall\, x,y\in\mathbb{R}.$$

(*Gheorghe Boroica*)

Soluţie. Pentru $x=y=0$ obţinem $f(0)=0$. Deoarece f este derivabilă pe $\mathbb{R}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$ avem

$$\begin{aligned} f'(x)&=\lim_{y\to 0}\frac{f(x+y)-f(x)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{e^{5x}f(y)+e^{2y}f(x)-f(x)}{y}\\ &=\lim_{y\to 0}\left(e^{5x}\frac{f(y)}{y}+f(x)\frac{e^{2y}-1}{y}\right)=e^{5x}f'(0)+2f(x), \end{aligned}$$

$f'(x)-2f(x)=c\cdot e^{5x}$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$, unde $c=f'(0)\in\mathbb{R}$.

Atunci $(f(x)e^{-2x})'=c\cdot e^{3x}\Rightarrow f(x)e^{-2x}=\frac{c}{3}e^{3x}+d$, $d\in\mathbb{R}$, adică

$$f(x)=\frac{c}{3}e^{5x}+d\cdot e^{2x},\quad \forall\, x\in\mathbb{R}.$$

Dar $f(0)=0\Rightarrow d=-\frac{c}{3}\Rightarrow f(x)=\frac{c}{3}(e^{5x}-e^{2x})$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$, funcţii care verifică relaţia din ipoteză.

14. *Fie $a\in(0,1)$ un număr real şi $a=0,a_1a_2\dots a_n\dots$, cu*

$$a_1,a_2,\dots,a_n\dots\in\{0,1,2,\dots,9\},$$

reprezentarea sa zecimală.

a) Să se arate că pentru orice $x \in (0,1)$ există şi este finită limita

$$\lim_{n\to\infty}(a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n).$$

b) Dacă notăm $f_a(x) = \lim_{n\to\infty}(a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n)$, $x \in (0,1)$, să se arate că funcţia $f_a : (0,1) \to \mathbb{R}$ este funcţie raţională dacă şi numai dacă numărul a este număr raţional.

(*Conf. dr. Vasile Pop*, Univ. Tehnică Cluj-Napoca)

Soluţie. a) pentru orice $x \in (0,1)$, şirul $A_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_kx^k$ este crescător şi

$$A_n(x) \le 9\sum_{k=1}^{n} x^k = 9x\frac{1-x^n}{1-x} \le \frac{9x}{1-x},$$

deci este mărginit superior.

În consecinţă, există şi este finită $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n)$.

b) Numărul a este raţional dacă şi numai dacă şirul $(a_n)_{n\ge1}$ este periodic. Dacă $a_n = a_{n+p}$, $\forall\, n > n_0$, atunci

$$\begin{aligned} A_{n_0+np}(x) &= a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n_0} + x^{n_0}R(x) + x^{n_0+p}R(x) + \ldots + x^{n_0+(n-1)p}R(x) \\ &= S(x) + x^{n_0}R(x)\frac{1-x^{np}}{1-x^p}, \end{aligned}$$

unde

$$R(x) = a_{n_0}x + a_{n_0+2}x^2 + \cdots + a_{n_0+p}x^p \in \mathbb{Z}[X],$$

deci f_a este o funcţie raţională.

Invers: dacă $f_a : (0,1) \to \mathbb{R}$, $f_a(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, $x \in (0,1)$ cu $P, Q \in \mathbb{Z}[X]$, atunci $f_a\left(\dfrac{1}{10}\right) = a$, deci $a \in \mathbb{Q}$.

15. *Fie a şi x_0 două numere reale strict pozitive. Considerăm şirurile $(a_n)_{n\ge1}$ şi $(x_n)_{n\ge1}$ pentru care*

1) $x_n - a_n = \sqrt{a}$ *oricare ar fi $n \ge 1$;*

2) $2x_nx_{n-1} = x_{n-1}^2 + a$ *pentru orice $n \ge 1$.*

Să se arate că:

1) *şirul $(x_n)_{n\ge1}$ este convergent şi are limita $\sqrt{a}$;*

2) $2^{n-1}a_n \le a_1$ *pentru orice $n \ge 2$.*

(*Lector dr. Andrei Horvat-Marc*, Univ. de Nord Baia Mare)

Soluţie. a) Arătăm, folosind principiul inducţiei matematice, că

$$x_n \geq \sqrt{a}, \text{ pentru orice } n \geq 1.$$

Pentru $n = 1$ avem $2x_1x_0 = x_0^2 + a$, de unde $x_1 = \dfrac{x_0^2 + a}{2x_0}$. Trebuie să arătăm că

$$\frac{x_0^2 + a}{2x_0} \geq \sqrt{a}.$$

Inegalitatea de mai sus este echivalentă cu $(x_0 - \sqrt{a})^2 \geq 0$. Deci $x_1 \geq \sqrt{a}$.
Presupunem că $x_k \geq \sqrt{a}$ şi demonstrăm că $x_{k+1} \geq \sqrt{a}$. Avem $x_{k+1} = \dfrac{x_k^2 + a}{2x_k}$.
Inegalitatea $x_{k+1} \geq \sqrt{a}$ revine la $(x_k - \sqrt{a})^2 \geq 0$.

În concluzie, şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este mărginit inferior de $\sqrt{a}$.

Avem

$$x_n - x_{n-1} = \frac{x_{n-1}^2 + a}{2x_{n-1}} - x_{n-1} = \frac{a - x_{n-1}^2}{2x_{n-1}} \quad n \geq 2.$$

Cum $x_n \geq \sqrt{n}$ oricare ar fi $n \geq 1$, obţinem că $x_n - x_{n-1} \leq 0$ pentru orice $n \geq 1$, deci $(x_n)_{n\geq 1}$ este un şir monoton descrescător. Am obţinut că $(x_n)_{n\geq 1}$ este un şir descrescător, mărginit inferior. Conform criteriului lui Weierstrass, şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

Fie $0 < l = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Din relaţia de recurenţă rezultă ecuaţia

$$2l^2 = l^2 + a.$$

Atunci $l \in \{\pm\sqrt{a}\} \cap (0, \infty)$. Se obţine

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}.$$

b) Pentru orice $n \geq 2$ avem

$$\begin{aligned} a_n = x_n - \sqrt{a} &= \frac{x_{n-1}^2 + a}{2x_{n-1}} - \sqrt{a} \\ &= \frac{\left(x_{n-1} - \sqrt{a}\right)^2}{2x_{n-1}} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{a}}{x_{n-1}}\right) a_{n-1}. \end{aligned}$$

Cum $0 \leq 1 - \dfrac{\sqrt{a}}{x_k} \leq 1$ pentru orice $k \geq 2$, rezultă $a_n \leq \dfrac{1}{2}a_{n-1}$. Se obţine

$$a_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}\, a_1, \quad n \geq 2.$$

Clasa a XII-a

1. *Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ şi funcţiile continue $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că $f(a + b - x) = g(x)$, $\forall\, x \in [a, b]$. Să se calculeze* $\displaystyle\int_a^b (f(x) - g(x))dx$.

(În legătură cu problema 12 pag. 90, Argument 7-2005)
(*D. M. Bătineţu-Giurgiu*)

Soluţie. Cu schimbarea de variabilă $t = a + b - x$, avem

$$I \overset{not}{=} \int_a^b (f(x) - g(x))dx = \int_a^b (f(a + b - t) - g(a + b - t))dt$$
$$= \int_a^b (g(t) - f(a + b - (a + b - t))dt = \int_a^b (g(t) - f(t))dt = -I,$$

deci $I = 0$.

2. *Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ şi funcţiile continue $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}_+^*$, $h : [a, b] \to \mathbb{R}$, astfel încât $f(a+b-x) = g(x)$, $\forall\, x \in [a, b]$ şi $h(a+b-x) = -h(x)$, $\forall\, x \in [a, b]$. Să se calculeze* $\displaystyle\int_a^b \frac{(f(x))^{g(x)} + f(x) + h(x)}{(f(x))^{g(x)} + (g(x))^{f(x)} + f(x) + g(x)} dx.$

(O generalizare a problemei 4, pag. 88, Argument 7-2005)
(*D. M. Bătineţu-Giurgiu*)

Soluţie. Folosind ipoteza avem $g(a + b - x) = f(a + b - (a + b - x)) = f(x)$, $x \in [a, b]$. Cu schimbarea de variabilă $a + b - x = t$, integrala cerută devine

$$I = \int_a^b \frac{f^{g(a+b-t)}(a + b - t) + f(a + b - t) + h(a + b - t)}{(f(a+b-t))^{g(a+b-t)} + (g(a+b-t))^{f(a+b-t)} + f(a+b-t) + g(a+b-t)} dt$$
$$= \int_a^b \frac{(g(t))^{f(t)} + g(t) - h(t)}{(g(t))^{f(t)} + (f(t))^{g(t)} + g(t) + f(t)} dt,$$

de unde deducem că $2I = \displaystyle\int_a^b dt = b - a$, deci $I = \dfrac{b - a}{2}$.

3. *Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ şi funcţiile continue $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că $f(a + b - x) = f(x)$ şi $g(a + b - x) = -g(x)$, $\forall\, x \in [a, b]$. Să se arate că*

$$\int_a^b \frac{f(x)}{1 + e^{g(x)}} dx = \frac{1}{2} \int_a^b f(x)dx.$$

(O generalizare a problemei 3, pag. 72, Argument 7-2005)
(*D. M. Bătineţu-Giurgiu*)

Soluţie. Cu schimbarea de variabilă $a+b-x=t$, avem

$$\begin{aligned} I &\overset{not}{=} \int_a^b \frac{f(x)}{1+e^{g(x)}}\,dx = \int_a^b \frac{f(a+b-t)}{1+e^{g(a+b-t)}}\,dt \\ &= \int_a^b \frac{f(t)}{1+e^{-g(t)}}\,dt = \int_a^b \frac{f(t)\cdot e^{g(t)}}{1+e^{g(t)}}\,dt, \end{aligned}$$

deci

$$2I = \int_a^b \frac{f(x)(1+e^{g(x)})}{1+e^{g(x)}}\,dx \Leftrightarrow I = \frac{1}{2}\int_a^b f(x)dx.$$

4. *Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, periodică şi neconstantă, iar $k\in\mathbb{N}^*$. Să se arate că dacă funcţia f este derivabilă cu derivata continuă, atunci funcţia*

$$g_k:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g_k(x)=\begin{cases} f'\left(\dfrac{1}{x^k}\right), & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

admite primitive.

(*Florin Bojor*)

Soluţie. Deoarece funcţia f este periodică şi neconstantă, rezultă că ea este mărginită şi derivata ei este periodică şi neconstantă, deci $\nexists \lim\limits_{x\to 0} g_k(x)$. Atunci funcţia g_k nu este continuă.

Considerăm funcţia $F_k:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F_k(x)=\begin{cases} x^{k+1}\cdot f\left(\dfrac{1}{x^k}\right), & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$.

Pe baza mărginirii lui f, rezultă că funcţia F_k este derivabilă în $x=0$, deci pe $\mathbb{R}$, şi $F_k'(x)=(k+1)h_k(x)-k\cdot g_k(x)$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$, unde $h_k:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$h_k(x)=\begin{cases} x^k\cdot f\left(\dfrac{1}{x^k}\right), & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}.$$

Deoarece funcţia h_k este continuă şi F_k' admite primitive, va rezulta că şi funcţia g_k admite primitive.

5. *Să se calculeze limita şirului $(a_n)_{n\geq 2}$,*

$$a_n=\frac{\sqrt[n]{(n^3+1^3)(n^3+2^3)\cdot\ldots\cdot(n^3+n^3)}}{n^3}.$$

(*Gheorghe Boroica*)

Soluţie. Avem $a_n > 0$ şi

$$\ln a_n = \ln \sqrt[n]{\frac{(n^3+1^3)(n^3+2^3)\cdot \ldots \cdot (n^3+n^3)}{n^{3n}}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k^3}{n^3}\right),$$

deci

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \ln a_n &= \int_0^1 \ln(1+x^3)dx = x\ln(1+x^3)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{3x^3}{1+x^3}\,dx \\
&= \ln 2 - 3\int_0^1 \left(1-\frac{1}{1+x^3}\right)dx = \ln 2 - 3 + \int_0^1 \frac{3}{(x+1)(x^2-x+1)}\,dx \\
&= \ln 2 - 3 + \int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{x-2}{x^2-x+1}\right)dx \\
&= 2\ln 2 - 3 - \int_0^1 \frac{1}{2}\cdot\frac{2x-1-3}{x^2-x+1}\,dx \\
&= 2\ln 2 - 3 - \frac{1}{2}\ln(x^2-x+1)\Big|_0^1 + \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)\Big|_0^1 \\
&= 2\ln 2 - 3 + 2\sqrt{3}\cdot\frac{\pi}{6} = \ln 4 - \ln e^3 + \ln e^{\frac{\sqrt{3}\cdot\pi}{3}} = \ln\left(4\cdot e^{\frac{\sqrt{3}\cdot\pi}{3}-3}\right).
\end{aligned}$$

Aşadar, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 4\cdot e^{\frac{\sqrt{3}\pi}{3}-3}$.

6. *Se consideră polinomul $P_n(X)$ definit prin $P_0(X) = 0$, $P_1(X) = 2$ şi $P_n(X) = 2X\cdot P_{n-1}(X) + (1-X^2)P_{n-2}(X)$ pentru orice $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$. Să se afle rădăcinile polinomului P_n, unde $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$.*

(*Gheorghe Boroica*)

Soluţie. Avem

$P_0(X) = 0,\quad P_1(X) = 2 = X+1-(X-1)$,

$P_2(X) = 2X\cdot P_1(X) + (1-X^2)P_0(X) = 4X = (X+1)^2-(X-1)^2$,

$P_3(X) = 2X\cdot P_2(X) + (1-X^2)P_1(X) = 6X^2+2 = (X+1)^3-(X-1)^3$.

Prin inducţie matematică, $P_n(X) = (X+1)^n - (X-1)^n$, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$.

Cum $x=1$ nu e rădăcină pentru P_n, avem

$P_n(x) = 0 \Leftrightarrow (x+1)^n = (x-1)^n \Leftrightarrow \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^n = 1 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1} = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\frac{2k\pi}{n}$, deci $x_k = -i\cdot\mathrm{ctg}\,\frac{k\pi}{n}$, $k\in\overline{1,n-1}$.

7. *Fie funcţia* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *cu proprietatea că funcţiile* $g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *date prin* $g(x)=(ax+b)f(x)$, $h(x)=x\cdot f(ax+b)$, $a,b\in\mathbb{R}^*$, $a\neq -1$, *admit primitive pe* $\mathbb{R}$. *Să se arate că funcţia* f *admite primitive pe* $\mathbb{R}$.

(*Ludovic Longaver*, Liceul "Németh László")

Soluţie. Deoarece funcţia h admite primitive pe $\mathbb{R}$, rezultă că funcţia $u:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $u(x)=a^2\cdot h\left(\dfrac{x-b}{a}\right)=a(x-b)f(x)=axf(x)-ab\,f(x)$ admite primitive pe $\mathbb{R}$. Astfel $g(x)-u(x)=(b+ab)f(x)$ admite primitive pe $\mathbb{R}$, deci şi funcţia f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

8. *Se consideră funcţia continuă* $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ *pentru care există* $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=l\in\mathbb{R}$. *Să se arate că*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\int_n^{n+1}\sqrt{x}f(x)dx=l.$$

(*Nicolae Muşuroia*)

Soluţie. Din $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=l\in\mathbb{R}$, rezultă că pentru $\forall\,\varepsilon>0$, $(\exists)\,\delta>0$, astfel încât $|f(x)-l|<\varepsilon$, $\forall\,x>\delta$. Pentru $n>\delta$ avem

$$\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\int_n^{n+1}\sqrt{x}(f(x)-l)dx\right|\leq\frac{1}{\sqrt{n}}\int_n^{n+1}\sqrt{x}|f(x)-l|dx<\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\int_n^{n+1}\sqrt{x}dx$$
$$=\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\cdot\frac{2}{3}\left(\sqrt{(n+1)^3}-\sqrt{n^3}\right)$$
$$=\frac{2\varepsilon}{3\sqrt{n}}\cdot\frac{3n^2+3n+1}{(n+1)\sqrt{n+1}+n\sqrt{n}}\leq\frac{2\varepsilon}{3\sqrt{n}}\cdot\frac{7n^2}{n\sqrt{n}}=\frac{14\varepsilon}{3}.$$

Aşadar, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\displaystyle\int_n^{n+1}\sqrt{x}(f(x)-l)dx=0$, de unde rezultă că

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\int_n^{n+1}\sqrt{x}f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\frac{l}{\sqrt{n}}\int_n^{n+1}\sqrt{x}dx=l.$$

9. *Se consideră funcţia* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *care verifică relaţia* $e^{f(x)}+f(x)=e^x$, *pentru orice* $x\in\mathbb{R}$.

a) Să se arate că f *este o funcţie strict monotonă.*

b) Să se calculeze $\displaystyle\int_0^{\ln(1+e)}e^xf(x)dx$.

(*Nicolae Muşuroia*)

Soluţie. a) Arătăm că f este strict crescătoare. Presupunând contrariul, există $x, y \in \mathbb{R}$ cu $x < y$ dar $f(x) \geq f(y)$. Atunci din $e^{f(x)} \geq e^{f(y)}$ şi $f(x) \geq f(y)$, rezultă că $e^{f(x)} + f(x) \geq e^{f(y)} + f(y)$, deci $e^x \geq e^y$, adică $x \geq y$, contradicţie.

b) Considerăm funcţia bijectivă $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = e^x + x$. Relaţia dată se scrie $g(f(x)) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$, deci $f(x) = g^{-1}(e^x)$ şi

$$I = \int_0^{\ln(1+e)} e^x \cdot f(x)dx = \int_0^{\ln(1+e)} e^x g^{-1}(e^x)dx.$$

Cu schimbarea de variabilă $e^x = t$, obţinem

$$I = \int_1^{1+e} g^{-1}(t)dt \underset{g^{-1}(t)=y}{=} \int_0^1 y \cdot g'(y)dy = \int_0^1 (y \cdot e^y + y)dy = \frac{3}{2}.$$

10. *Se consideră funcţia integrabilă* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *cu proprietatea*

$$\frac{n}{m!} \leq f\left(\frac{m}{n}\right) \leq e^{\frac{m}{n}}, \ \textit{pentru orice } m, n \in \mathbb{N}^*, \ m \leq n.$$

Să se arate că $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = e - 1.$

(*Nicolae Muşuroia*)

Soluţie. Avem $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$. Din $\displaystyle\frac{n}{k!} \leq f\left(\frac{k}{n}\right) \leq e^{\frac{k}{n}}$ rezultă că $\displaystyle n\sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \leq \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \sum_{k=1}^n e^{\frac{k}{n}} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n e^{\frac{k}{n}}$.
Trecând la limită în această dublă inegalitate şi folosind criteriul cleştelui, rezultă că $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = e - 1.$

11. *Să se arate că dacă G este un grup multiplicativ cu elementul neutru e şi $g : G \to G$ este un morfism injectiv cu proprietatea că $g(x \cdot g(x)) = e$, $\forall\, x \in G$, atunci grupul G este abelian.*

(*Lucian Dragomir*, Oţelul Roşu)

Soluţie. Din g morfism, $g(e) = e$, deci $g(xg(x)) = g(e)$, $\forall\, x \in G$. Cum g e injectivă, obţinem că $xg(x) = e$, $\forall\, x \in G$ sau $g(x) = x^{-1} \cdot e$, $\forall\, x \in G$, funcţie ce verifică relaţia funcţională din ipoteză.

Din g morfism rezultă că pentru $\forall\, x, y \in G$ avem

$g(xy) = g(x) \cdot g(y) \Leftrightarrow (xy)^{-1}e = x^{-1}ey^{-1}e \Leftrightarrow (xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1} \Leftrightarrow e = xy \cdot x^{-1}y^{-1} \Leftrightarrow y = xyx^{-1} \Leftrightarrow yx = xy$, adică grupul este comutativ.

12. *Se consideră şirul* $(I_n)_{n\geq 1}$, *unde* $I_n = \displaystyle\int_0^1 \ln\left(1+\frac{x^2}{n}\right)dx$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot I_n$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(n \cdot I_n - \dfrac{1}{3}\right)$.

(*Nicolae Muşuroia*)

Soluţie. a) Avem

$$I_n = x\ln\left(1+\frac{x^2}{n}\right)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{2x^2}{x^2+n}\,dx = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - 2 + 2n\frac{1}{\sqrt{n}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{n}}\Big|_0^1$$
$$= \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - 2 + 2\sqrt{n}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{n}}\,,$$

deci $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$.

Aşadar,

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot I_n = \lim_{n\to\infty}\left[n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - 2\left(n - n\sqrt{n}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right]$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} - 2n\cdot\sqrt{n}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right]$$
$$= 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}\,,$$

deoarece

$$\lim_{x\to 0}\frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3} \overset{L'H}{=} \frac{1}{3}\,.$$

b) Avem

$$\lim_{n\to\infty} n\left(nI_n - \frac{1}{3}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left[n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - 2n + 2n\sqrt{n}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{3}\right]$$
$$= \lim_{n\to\infty} n^2\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - 2 + 2\sqrt{n}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{3n}\right]$$
$$= -\frac{1}{10}\,,$$

deoarece

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)-2+2\frac{\operatorname{arctg}x}{x}-\frac{1}{3}x^2}{x^4}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{x\ln(1+x^2)-2x+2\operatorname{arctg}x-\frac{1}{3}x^3}{x^5}\\
&\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)+\frac{2x^2}{1+x^2}-2+\frac{2}{1+x^2}-x^2}{5x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)-x^2}{5x^4}\\
&\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2x}{1+x^2}-2x}{20x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{-2x^3}{20x^3(1+x^2)}=-\frac{1}{10}.
\end{aligned}$$

13. *Se consideră $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ şi funcţiile continue $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ astfel încât f este strict monotonă şi $g > 0$. Să se arate că pentru orice $t \in (a, b)$, există numerele distincte $c, d \in [a, b]$ cu proprietatea că*

$$\int_c^d g(x)f(x)dx = f(t)\int_c^d g(x)dx.$$

(*Gheorghe Boroica*)

Soluţie. Fie G o primitivă pentru g şi H o primitivă pentru funcţi a $g\cdot f$. Relaţia de demonstrat se scrie

$$\begin{aligned}
H(d)-H(c)=f(t)\cdot(G(d)-G(c)) &\Leftrightarrow H(d)-G(d)\cdot f(t)\\
&= H(c)-G(c)\cdot f(t) \Leftrightarrow u(d)=u(c),
\end{aligned}$$

unde $u : [a, b] \to \mathbb{R}$, $u(x) = H(x) - G(x)\cdot f(t)$.
Funcţia u este derivabilă pe $[a, b]$ şi $u'(x)=H'(x)-G'(x)f(t)=g(x)(f(x)-f(t))$.
Cum $g > 0$ şi f este strict monotonă, ecuaţia $u'(x) = 0$ are doar rădăcina $x_0 = t$.

Dacă f e strict crescătoare, atunci $u'(x) < 0$ pentru $x \in [a, t)$ şi $u'(x) > 0$ pentru $x \in (t, b]$, deci u este strict descrescătoare pe $[a, t]$ şi strict crescătoare pe $[t, b]$ şi atunci funcţia u nu este injectivă. Ca urmare, există $c \neq d$ în $[a, b]$ astfel încât $u(c) = u(d)$, adică are loc concluzia.

Dacă f este strict descrescătoare, atunci se procedează în mod analog.

14. *Se consideră $n \in \mathbb{N}^*$ şi funcţiile $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât*

$$g(x) = f(x)\cdot\sin^{2n-1}x \quad \text{şi} \quad h(x) = f(x)\cdot\cos^{2n-1}x,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Să se arate că dacă funcţiile g şi h sunt primitivabile pe $\mathbb{R}$, atunci şi f este primitivabilă pe $\mathbb{R}$.

(*Gheorghe Boroica*)

Soluţie. Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, avem

$$g(x)\sin x + h(x)\cos x = f(x)(\sin^{2n} x + \cos^{2n} x),$$

deci

$$f(x) = \frac{1}{\sin^{2n} x + \cos^{2n} x}\,(g(x)\sin x + h(x)\cos x).$$

Utilizând faptul că produsul dintre o funcţie primitivabilă şi una derivabilă cu derivata continuă este o funcţie primitivabilă, folosind ultima relaţie, se obţine că f are primitive pe $\mathbb{R}$.

15. *Să se determine funcţiile* $f : [0, \infty] \to \mathbb{R}$ *continue şi descrescătoare care satisfac inegalitatea:*

$$\int_0^1 xf(x^3 - 2x + 2)dx + 5\int_0^1 xf(x)dx \geq 3 + \int_0^1 f^2(x)dx.$$

(*Gheorghe Boroica*)

Soluţie. Deoarece $x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, rezultă că $x^3 - 2x + 2 \geq x$, $\forall\, x \in [0, 1]$, deci $f(x^3 - 2x + 2) \leq f(x)$, $\forall\, x \in [0, 1]$, de unde

$$\int_0^1 xf(x^3 - 2x + 2)dx \leq \int_0^1 xf(x)dx.$$

Relaţia din ipoteză ne conduce la

$$\int_0^1 f^2(x)dx + \int_0^1 9x^2dx \leq 6\int_0^1 xf(x)dx \Leftrightarrow \int_0^1 (f(x) - 3x)^2dx \leq 0,$$

deci $f(x) = 3x$, funcţie ce nu convine. Aşadar, nu există funcţii cu proprietatea cerută.

Probleme propuse

Clasa a IX-a

1. Fie $d_1 < d_2 < \cdots < d_k$, divizorii proprii ai numărului natural n.
i) Să se calculeze produsul $d_1 \cdot d_2 \cdot \ldots \cdot d_k$.
ii) Să se arate că n^k este un pătrat perfect.

Gheorghe Râmbu

2. Să se arate că în orice triunghi ABC ascuţitunghic avem

$$\frac{\cos B \cos C}{\cos A} + \frac{\cos C \cdot \cos A}{\cos B} + \frac{\cos A \cdot \cos B}{\cos C} \geq \frac{3}{2}\,.$$

Nicolae Muşuroia

3. Fie a, b, c numere reale strict pozitive. Să se arate că

$$3x^2 - 4\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right)x + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geq 0, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Nicolae Muşuroia

4. Se consideră triunghiul ascuţitunghic ABC înscris în cercul $C(O;R)$. Să se arate că, dacă R_1, R_2, R_3 sunt razele cercurilor circumscrise triunghiurilor AOB, BOC, respectiv COA, atunci

$$\frac{2}{R} < \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \leq \frac{3}{R}\,.$$

Nicolae Muşuroia

5. Se consideră numerele strict pozitive a_1, a_2, b_1, b_2. Să se arate că

$$(a_1 + a_2)x^2 - 2\Big(\sqrt{[a_1]\cdot[b_1]} + \sqrt{\{a_1\}\cdot\{b_1\}} + \sqrt{[a_2]\cdot[b_2]}$$
$$+ \sqrt{\{a_2\}\cdot\{b_2\}}\Big)x + b_1 + b_2 \geq 0, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Nicolae Muşuroia, Ion Savu

6. Să se arate că

$$\frac{x+y^2}{4+y^3+z^3}+\frac{y+z^2}{4+z^3+x^3}+\frac{z+x^2}{4+x^3+y^3}\le 1,\quad \forall\, x,y,z\in[0,1].$$

Gheorghe Boroica

7. Să se arate că, dacă a,b,c sunt lungimile laturilor unui triunghi şi $\alpha\in[1,\infty)$, atunci

$$\frac{a}{\alpha(b+c)-a}+\frac{b}{\alpha(c+a)-b}+\frac{c}{\alpha(a+b)-c}\ge\frac{3}{2\alpha-1}\,.$$

Gheorghe Boroica

8. Notăm cu l_a,l_b,l_c lungimile bisectoarelor interioare unui triunghi ABC şi cu r raza cercului înscris triunghiului. Să se arate că

$$l_a+l_b+l_c\ge 9r.$$

Ludovic Longaver, Liceul "Németh László"

9. Să se arate că triunghiul ABC, în care avem relaţia

$$h_a\cdot h_b+h_b\cdot h_c+h_c\cdot h_a=\frac{3}{4}\,(a^2+b^2+c^2),$$

este echilateral.

Ludovic Longaver, Liceul "Németh László"

10. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ care verifică ecuaţia funcţională $f(x)=x\cdot f(1-\{x\}),\ \forall\, x\in\mathbb{R}$. Să se determine funcţia f, ştiind că

$$\sum_{k=1}^{n} f(k)=\frac{n(n+1)}{2}\,,\quad \forall\, n\in\mathbb{N}^*.$$

Gheorghe Gherasim, Liceul "Regele Ferdinand", Sighetu Marmaţiei

11. Să se arate că:
a) Ecuaţia $9x^2+5y=7$ nu are soluţii în numere întregi.
b) Ecuaţia $9x^2+5y=4$ are o infinitate de soluţii în numere întregi.

(*Gheorghe Gherasim*, Liceul "Regele Ferdinand", Sighetu Marmaţiei)

12. Să se determine numerele $a, b, c > 0$ ştiind că

$$\frac{a^2-a+1}{b+c}+\frac{b^2-b+1}{c+a}+\frac{c^2-c+1}{a+b}=\frac{3}{2}.$$

Gheorghe Boroica

13. Să se determine funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pentru care

$$f(x \cdot y) \geq x^{2010} \cdot f(y), \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}.$$

Marin Bancoş, Universitatea de Nord Baia Mare

14. Să se rezolve sistemul $\begin{cases} x \cdot z = y \cdot t \\ x^z = y^t \end{cases}$ ştiind că $x, y, z, t \in \mathbb{N}^*$, $x \neq y$, iar z şi t sunt prime între ele.

Cristian Heuberger

15. Se consideră triunghiul ABC şi punctele $M \in (BC)$, $N \in (AC)$, $P \in (AB)$, astfel încât $AM \cap BN \cap CP = \{Q\}$. Notăm $\dfrac{PA}{PB} = x$, $\dfrac{NA}{NC} = y$.

a) Să se demonstreze că Q este centrul de greutate al $\triangle MNP$ dacă şi numai dacă Q este centrul de greutate al $\triangle ABC$.

b) Să se demonstreze că

$$AQ + BQ + CQ < \frac{(1+x)AB + (1+y)AC + (x+y)BC}{1+x+y}.$$

c) Să se demonstreze că se poate construi un triunghi cu laturile de lungime

$$AQ,\ x \cdot BQ,\ y \cdot CQ.$$

Dana Heuberger

Clasa a X-a

1. Să se rezolve în mulţimea numerelor naturale nenule ecuaţia

$$2^{\sqrt{2x \cdot \log_2 x}} + x^{\sqrt{2x \cdot \log_x 2}} = 2^x + x^2.$$

Ludovic Longaver, Liceul "Németh László"

2. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f\circ f\circ f=f$.

a) Să se demonstreze că f este injectivă dacă şi numai dacă f este surjectivă.

b) Daţi un exemplu de funcţie f care nu este injectivă, are proprietatea din enunţ şi nu este constantă.

c) Să se arate că există o infinitate de funcţii f bijective cu proprietatea din enunţ şi care nu sunt monotone pe nici un interval din $\mathbb{R}$.

d) Să se demonstreze că există o infinitate de funcţii f, astfel încât $\forall\, x\in\mathbb{R}$, $f(x)\le x$.

Dana Heuberger

3. Fie patrulaterul inscriptibil $ABCD$ şi punctul M pe cercul său circumscris. Fie M' punctul diametral opus lui M şi H_1, H_2, H_3, H_4 respectiv ortocentrele triunghiurilor MAB, MBC, $M'CD$, $M'AD$.

a) Să se demonstreze că $H_1H_2H_3H_4$ este paralelogram.

b) Dacă G_1 şi G_2 sunt respectiv centrele de greutate ale triunghiurilor H_1CD şi H_3AB, să se determine locul geometric al punctelor segmentului $[G_1G_2]$, atunci când M parcurge cercul.

Dana Heuberger

4. Să se arate că dacă $a,b,c\in(0,1)$ sau $a,b,c\in(1,\infty)$, atunci

$$\frac{1}{\log_a b\cdot\log_b c+\log_c a}+\frac{1}{\log_b c\cdot\log_c a+\log_a b}+\frac{1}{\log_c a\cdot\log_a b+\log_b c}\le\frac{3}{2}\,.$$

Nicolae Muşuroia

5. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale pozitive ecuaţia

$$a^{x_1}+3a^{x_2}+5a^{x_3}+\cdots+(2n-1)a^{x_n}=n^2,\ \text{ unde }\ a>0, a\neq 1, n\in\mathbb{N}^*.$$

Nicolae Muşuroia

6. Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} 2^{[x]}+2^{\{y\}}=2^{\frac{z}{2}+1}\\ 2^{[y]}+2^{\{z\}}=2^{\frac{x}{2}+1}\\ 2^{[z]}+2^{\{x\}}=2^{\frac{y}{2}+1}\end{cases}.$$

Nicolae Muşuroia

7. Pentru triunghiul ABC notăm cu z_A, z_B, z_C, respectiv z_G, afixele vârfurilor, respectiv ale centrului de greutate. Să se arate că, dacă

$$\left|\frac{z_G - z_A}{z_G - z_B}\right| + \left|\frac{z_G - z_B}{z_G - z_C}\right| + \left|\frac{z_G - z_C}{z_G - z_A}\right| = 3,$$

atunci triunghiul ABC este echilateral.

Nicolae Muşuroia

8. Se consideră mulţimea $E = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Să se determine numărul de soluţii ale ecuaţiei $X \cup Y \cup Z = E$, ştiind că orice element al mulţimii E apare cel puţin în două dintre mulţimile X, Y şi Z. Generalizare.

Gheorghe Boroica

9. Să se arate că în orice triunghi ABC nedreptunghic avem

$$\frac{1}{(\operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B)^n} + \frac{1}{(\operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C)^n} + \frac{1}{(\operatorname{tg} C \cdot \operatorname{tg} A)^n} \geq \frac{1}{3^{n-1}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Gheorghe Boroica

10. Fie n un număr întreg dat. Rezolvaţi în numere reale ecuaţia

$$[x] + [\log_2 x] = n + 2^{n-1}.$$

Cristinel Mortici, Universitatea "Valahia", Târgovişte

11. Fie a, b, c, d numere reale strict pozitive cu proprietatea că $a^{10} + b^{10} + c^{10} + d^{10} + 10abcd = 14$. Să se demonstreze că

$$ab + ac + ad + bc + bd + cd \geq 6abcd.$$

Horia Zlampareţ

12. Să se demonstreze că în orice triunghi are loc inegalitatea

$$\frac{a^2}{b^2 + 4m_b \cdot R} + \frac{b^2}{c^2 + 4m_c \cdot R} + \frac{c^2}{a^2 + 4m_a \cdot R} \leq 1,$$

notaţiile fiind cele uzuale.

Marin Bancoş, Universitatea de Nord Baia Mare

13. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia

$$2^{x+1} + 2^{5-x} = -x^2 + 4x + 70.$$

Gheorghe Boroica

14. În tetraedrul $[A_1A_2A_3A_4]$ notăm cu S aria totală şi cu S_k aria feţei opuse vârfului A_k, $k \in \{1,2,3,4\}$. Să se demonstreze că

$$\sum_{k=1}^{4} \frac{1}{a \cdot S^2 + b \cdot S_k^2} \geq \frac{8 \cdot \sqrt{a} - \sqrt{b}}{2 \cdot a \cdot \sqrt{a} \cdot S^2}, \quad \forall\, a, b \in (0, \infty).$$

D. M. Bătineţu-Giurgiu

15. Să se demonstreze că

$$\frac{x^3}{x^2 + xy + y^2} + \frac{y^3}{y^2 + yz + z^2} + \frac{z^3}{z^2 + z \cdot x + x^2} \geq \frac{x + y + z}{3}, \quad \forall\, x, y, z \in (0, \infty).$$

D. M. Bătineţu-Giurgiu

Clasa a XI-a

1. Să se determine toate funcţiile $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue în $x = \dfrac{1}{2}$ şi care au proprietatea

$$f(x) = f\left(\frac{\sqrt[k]{x}}{\sqrt[k]{x} + \sqrt[k]{x-1}}\right), \quad \forall\, x \in [0,1],$$

unde $k \geq 2$ este un număr natural fixat.

Sever Pop

2. Fie $p \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ şi şirul $(x_n)_{n \geq 0}$ definit astfel: $x_0 > 0$ şi $x_n + \dfrac{1}{\sqrt[p]{x_n}} = \dfrac{1}{\sqrt[p]{x_{n+1}}}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} n^p \cdot x_n^{p+1}$.

Gheorghe Râmbu

3. Să se determine funcţia continuă $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ pentru care
$$f(x)\cdot f(x^2)\cdot f(x^4)=x^7\cdot e^{x^8-x},\quad \forall\, x>0.$$

(În legătură cu problema 25690, G. M. 12/2006)

Nicolae Muşuroia

4. Să se arate că dacă $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\det(AB-BA)\neq 0$ şi $\sin^2\alpha\cdot A^2+B^2=\cos\alpha(AB-BA)$, $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, atunci $n\cdot\alpha\in\pi\cdot\mathbb{Z}$.

Nicolae Muşuroia, Ion Savu

5. Să se determine funcţiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ şi care satisfac simultan condiţiile:
a) $f(x+y)-x\cdot y\geq f(x)+f(y)$, $\forall\, x,y\in\mathbb{R}$;
b) $f(x)\geq 1-\cos x$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$.

Gheorghe Boroica

6. Se consideră $\alpha\in[1,\infty)$ şi şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ dat de $a_0=0$, $a_1=1$ şi $a_{n+1}=\sqrt{a_n^2\cdot\alpha+a_{n-1}}$, $\forall\, n\geq 1$. Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$ şi să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+10}}{a_n}$.

Gheorghe Boroica

7. Fie $p\in\mathbb{N}$, $p\geq 2$, $x_1>0$, $x_{n+1}=\dfrac{1}{p-1}x_n(2^{-x_n}+3^{-x_n}+\cdots+p^{-x_n})$, $n\in\mathbb{N}^*$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot x_n$.

(Generalizarea problemei 21056 din G. M. 3/1987)

Nicolae Muşuroia

8. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie şi şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ definit prin $x_0\in\mathbb{R}$, iar $x_{n+1}=f(x_n)$, $\forall\, n\geq 0$.

a) Dacă există $\alpha\in(0,1)$ astfel încât $|f(x)-f(y)|\leq\alpha|x-y|$, $\forall\, x,y\in\mathbb{R}$, atunci demonstraţi că şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este convergent.

b) Dacă există $\alpha>1$, astfel încât $|f(x)-f(y)|\geq\alpha|x-y|$, $\forall\, x,y\in\mathbb{R}$, iar $x_0\in\mathbb{R}$ nu este punct fix al funcţiei f, atunci demonstraţi că şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este divergent.

Florin Bojor

9. Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin $a_1 \in (0,1)$ şi $a_{n+1} = \dfrac{a_n^2 + 2a_n}{a_n + 1}$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - n)$.

Florin Bojor

10. Fie A şi B două matrice pătratice de ordinul k şi $m, n, p, q \in \mathbb{R}^*$, cu $m, n, p \neq q$. Să se arate că dacă au loc relaţiile

$$mA^2 + nB^2 = O_k \quad \text{şi} \quad pAB + qBA = I_k,$$

atunci matricele A şi B comută.

Marin Bancoş, Universitatea de Nord Baia Mare

11. Fie $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ astfel încât $\det(X) = 1$. Să se arate că dacă notăm $a_n = Tr(X^n)$, $n \in \mathbb{N}^*$, atunci

$$a_n \cdot a_{n+2} - a_{n+1}^2 = a_1^2 - 4, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$$

Gheorghe Boroica

12. Se consideră $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât

$$\det(X) = -1 \quad \text{şi} \quad Tr(X + X^3 + X^5) = 0.$$

Să se arate că $X^2 = I_2$.

Gheorghe Boroica

13. Fie $A, B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ astfel încât

$$(ABC - 2BCA + CAB)^2 = (ABC)^2 - 2(BCA)^2 + (CAB)^2.$$

Să se arate că:

a) $Tr((ABC)^n) = Tr((BCA)^n)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$;
b) $(ABC - 2BCA + CAB)^2 = O_2$;
c) Dacă $Tr(ABC) \neq 0$, atunci $ABC + CAB = 2BCA$.

Dana Heuberger

14. Determinaţi funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, derivabile de două ori, astfel încât să aibă loc egalitatea $f \cdot f'' = (f^2)' - (f')^2$.

Cristian Heuberger

15. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Notăm cu $\mathcal{M}$ mulţimea matricelor din $\mathcal{M}_n(\mathbb{N})$ care au exact câte n elemente egale cu fiecare din numerele $1, 2, 3, \ldots, n$.

a) Să se arate că, pentru orice $r \in \{1, 2, \ldots, n\}$, există $X \in \mathcal{M}$, cu rang $X = r$.

b) Pentru $n = 5$, să se determine $A, B \in \mathcal{M}$, astfel încât $A + B$ să fie inversabilă.

Dana Heuberger

Clasa a XII-a

1. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifică proprietăţile:

i) $f(0) = 0$;

ii) $f(x + y) = f(x) + f(y)$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

a) Să se determine $f|_{\mathbb{Q}}$, restricţia lui f la mulţimea numerelor raţionale $\mathbb{Q}$.

b) Să se descrie funcţia f.

Adela Baciu (elevă) şi prof. Costel Chiteş, Bucureşti

2. Să se calculeze următoarea limită

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{n+1} + \sqrt[n]{n+2} + \cdots + \sqrt[n]{n+n}) - n\sqrt[n]{n}.$$

Sever Pop

3. Se consideră $a > 0$ şi funcţia $f : [0, a] \to \mathbb{R}$ de n ori derivabilă, $n \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0$. Să se arate că, pentru orice $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ are loc inegalitatea

$$\left(\int_0^a f(x)dx\right)^2 \leq \frac{a^{2k+1}}{(2n+1)(n!)^2} \int_0^a (f^{(k)}(x))^2 dx.$$

Gheorghe Râmbu

4. Se consideră $n \in \mathbb{N}^*$, polinomul $f \in \mathbb{Z}[X]$ şi $\Delta = (x_0, x_1, \ldots, x_p)$, $x_k \in \mathbb{Z}$, $k \in \overline{0,p}$ o diviziune a intervalului $[0, n]$, unde $p \in \mathbb{N}^*$. Considerăm punctele $A_k(x_k, f(x_k))$, $k \in \overline{0,p}$. Dacă lungimile segmentelor $[A_k A_{k+1}]$, $k \in \overline{0, p-1}$ sunt numere raţionale, atunci calculaţi în funcţie de n suma lungimilor acestor segmente.

Ludovic Longaver, Liceul "Németh László"

5. Să se arate că, dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $f(\operatorname{arctg} x) > x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, atunci funcţia f nu are primitive pe $\mathbb{R}$.

Nicolae Muşuroia, Ion Savu

6. Să se arate că, dacă funcţia $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ verifică relaţia

$$(f \circ f)(x) = f(x) - e^x, \quad \forall\, x \in \mathbb{R},$$

atunci funcţia f nu are primitive pe $\mathbb{R}$.

Nicolae Muşuroia

7. Să se calculeze $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^n \frac{1}{(x^2 - x + 1)(x^n + 1)} dx$.

Nicolae Muşuroia

8. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel comutativ cu cel puţin două elemente, astfel încât pentru orice $x \in A$, x este inversabil dacă şi numai dacă $1 - x$ este neinversabil. (Un astfel de inel se numeşte inel local).

Notăm cu I mulţimea elementelor inversabile şi cu N mulţimea elementelor neinversabile ale inelului. Definim legea de compoziţie: $x * y = 1 + x + y$, $\forall\, x, y \in A$. Să se demonstreze că $(N, +)$ şi $(I, *)$ sunt grupuri izomorfe.

Dana Heuberger

9. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel comutativ, astfel încât $\forall\, x, y \in N \Rightarrow x + y \in N$, unde N reprezintă mulţimea elementelor neinversabile ale inelului. Notăm cu I mulţimea elementelor inversabile ale inelului. Pentru $y \in N$, considerăm funcţiile: $f_y : A \to A$, $f_y(x) = x + y + xy$ şi $g_y : I \to I$, $g_y(x) = f_y(x)$. Să se arate că funcţiile f_y şi g_y sunt bijective.

Dana Heuberger

10. Să se calculeze limita şirului $(x_n)_{n\geq 1}$, unde

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + \sqrt[3]{k(k^2+1)(k^3+1)}}.$$

Gheorghe Boroica

11. Pentru o funcţie $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ derivabilă şi cu derivata continuă, vom nota $I_f = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |f'(x) - \cos x \cdot f(x)|dx$.

a) Să se dea un exemplu de funcţie f nenulă pentru care $I_f = 0$.

b) Să se arate că $I_f \geq \left|\frac{1}{e} \cdot f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(0)\right|$.

Gheorghe Boroica

12. Fie $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ o funcţie integrabilă cu proprietatea că, pentru orice numere naturale $0 < m < n$, prime între ele, avem $0 \leq f\left(\frac{m}{n}\right) \leq \frac{1}{m}$.

Demonstraţi că, pentru orice $a, b \in (0, 1)$, cu $a < b$, există $w \in [a, b]$ astfel încât $f(w) = 0$.

Cristinel Mortici

13. Să se calculeze $\int \frac{e^x(x-2)}{x \cdot e^x + x^3} dx,\ x > 0$.

Gheorghe Gherasin, Liceul "Regele Ferdinand" Sighetu Marmaţiei

14. Să se arate că dacă $a, b \in (0, \infty) \backslash \{1\}$, $a \cdot b = 1$ şi $c \in (0, \infty)$, iar $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie impară, atunci

$$\int_a^b \frac{f(\ln^{2k+1} x)}{(1 + x^{2k})^{\frac{1}{c}}} dx = 0, \text{ unde } k \in \mathbb{N}.$$

D. M. Bătineţu-Giurgiu

15. Să se calculeze

$$\int \frac{(x + \sin x \cdot \cos x)^2}{x^2 - \cos^4 x} dx, \text{ unde } x \in \left[\frac{\pi}{2}, \infty\right).$$

Gheorghe Boroica

Erată

• La problema 12, clasa a X-a, în ipoteză se adaugă "înscris în $C(O, R)$".

• La problema 3, clasa a XI-a, relaţia "$>$" devine "$\geq$".

• La problema 15, clasa a XI-a, subpunctul 2), relaţia $2^{n-1}a_n \geq a$ devine $2^{n-1}a_n \leq a_1$.

• La problema 15, clasa a XII-a, $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ devine $f : [0, \infty] \to \mathbb{R}$ şi "$=$" devine "$\geq$".