Revistă de matematică editată de Catedra de matematică
a Colegiului Naţional "Gheorghe Şincai", Baia Mare

Materialele spre publicare se vor trimite pe adresa:
Colegiul Naţional "Gheorghe Şincai", str. Gh. Şincai 25, Baia Mare
sau pe adresa de mail: dana_heuberger@yahoo.com
cu menţiunea *pentru revista Argument*

ISSN 1582– 3660

Argument

Sumar

Revista "Argument" la ANIVERSARE

Ioan Mureşan

Colegiul Naţional "Gh. Şincai", ajuns la 90 de ani de la înfiinţare, a avut în evoluţia sa rolul liderului pentru învăţământul preuniversitar maramureşan, fiind în permanenţă model pentru profesorii din celelalte şcoli ale judeţului şi liceul dorit de către absolvenţii gimnaziului, această şcoală fiind văzută ca o poartă spre învăţământul universitar.

Garanţia reuşitei şcolare a fot întotdeauna corpul profesoral al Colegiului Naţional (Liceului) "Gh. Şincai", caracterizat prin profesionalism şi exigenţă, devenite tradiţionale. Profesorii s-au exprimat permanent prin rezultatele elevilor, dar şi prin activităţi ştiinţifice ale căror rezultate au fost publicate în reviste de specialitate sau făcute cunoscute în cadrul unor sesiuni de comunicări ştiinţifice.

Dorinţa de a-şi face cunoscute ideile şi în acelaşi timp realizările, precum şi pregătirea şi capacitatea de exprimare, au dus la mobilizarea profesorilor de matematică ai Colegiului Naţional "Gh. Şincai" pentru a scoate o revistă proprie. Aşa a apărut revista "Argument. Pentru oricine, era încă o revistă şcolară care putea să apară din când în când şi apoi să fie abandonată, mai puţin pentru membrii catedrei de matematică ai Colegiului Naţional "Gh. Şincai", care şi-au propus ca obiectiv pe termen lung să realizeze o revistă "puternică" şi comparabilă cu cele mai prestigioase şi de tradiţie reviste de specialitate din ţară.

Prin articolele publicate, problemele propuse şi problemele rezolvate, dar şi prin numele recunoscute ale autorilor acestora, revista "Argument" s-a făcut repede cunoscută şi solicitată de cei interesaţi, mai ales pentru pregătirea concursurilor şcolare, dar şi ca posibilitate de exprimare pentru profesorii de liceu, ori de exprimare a preocupărilor pentru învăţământul matematic preuniversitar a specialiştilor din învăţământul superior.

Atractivitatea revistei este crescută şi de secţiunea "Rezolvarea problemelor din numărul anterior", care o face mai accesibilă atât elevilor cât şi profesorilor cu preocupări de pregătire a concursurilor şcolare. În acelaşi timp, revista oferă modele de soluţii şi de redactare a acestora.

Acum revista "Argument" are unsprezece ani de la apariţia primului număr şi poate fi apreciată ca una din realizările importante ale Colegiului Naţional

"Gh. Şincai". Meritul revine în exclusivitate catedrei de matematică a Colegiului Naţional "Gh. Şincai", catedră care a avut întotdeauna o contribuţie majoră la rezultatele obţinute de elevii acestei şcoli, fie că ne referim la admiterea în învăţământul superior a absolvenţilor liceului, fie că vorbim despre laureaţii olimpiadelor şi concursurilor internaţionale, naţionale, zonale sau locale de matematică.

Acum, când Colegiul Naţional "Gh. Şincai" împlineşte 90 de ani de la înfiinţare, revista "Argument" a devenit un simbol al şcolii, un mod de exprimare a capacităţii creatoare a corpului său profesoral, un ARGUMENT pentru calitatea învăţământului din această şcoală.

Director,
Colegiul Naţional "Gh. Şincai" Baia Mare

Asupra unor ecuaţii funcţionale de tipul $f(x^{p+q} + y^{p+q}) = x^p f(x^q) + y^p f(y^q)$

Vasile Pop

Abstract. This paper will present some particular cases of the title equation and will suggest useful ideas and methods to solve other functional equations of the same type.

Un caz particular al ecuaţiei funcţionale din titlu (cazul $p = 1$, $q = 2$) reprezintă Subiectul 3 de la Olimpiada Naţională de Matematică, Neptun, 2009 şi s-a dovedit a fi deosebit de dificilă pentru concurenţi.

Vom prezenta în această lucrare câteva variante ale ecuaţiei din titlu şi vom încerca să sugerăm câteva metode şi idei utile pentru rezolvarea şi a altor ecuaţii funcţionale de acelaşi tip.

1. Cazul $p = 1$, $q = 1$.

Considerăm ecuaţia

$$(1)\qquad \begin{cases} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f(x^2 + y^2) = x \cdot f(x) + y \cdot f(y), \quad x, y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Pentru $x = y = 0$ obţinem $f(0) = 0$.
Pentru $y = 0$ obţinem $f(x^2) = x \cdot f(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
Ecuaţia se poate scrie sub forma

$$f(x^2 + y^2) = f(x^2) + f(y^2), \quad x, y \in \mathbb{R}$$

sau

$$(1')\qquad \begin{cases} f(u + v) = f(u) + f(v), \quad u, v \in [0, \infty) \\ f(x^2) = x \cdot f(x), \quad x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Pentru $x > 0$ avem

$$\begin{aligned} f((x+1)^2) &= (x+1)f(x+1) \Leftrightarrow f(x^2 + 2x + 1) \\ &= (x+1)(f(x) + f(1)) \Leftrightarrow f(x^2) + 2f(x) + f(1) \\ &= x \cdot f(x) + x \cdot f(1) + f(x) + f(1) \Leftrightarrow f(x) = x \cdot f(1),\ \forall x \geq 0. \end{aligned}$$

Avem: $f(x^2) = x^2 f(1)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ şi $f(x^2) = x \cdot f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, deci $x^2 \cdot f(1) = x \cdot f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) = x \cdot f(1)$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$.

În concluzie, singura soluţie a ecuaţiei (1) este $f(x) = a \cdot x$, $x \in \mathbb{R}$, unde $a \in \mathbb{R}$ este o constantă arbitrară.

2. Cazul $p = 1$, $q = 2$

$$(2) \qquad \begin{cases} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f(x^3 + y^3) = x \cdot f(x^2) + y \cdot f(y^2), \quad x, y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Soluţia completă poate fi urmărită în Suplimentul Gazetei Matematice cu problemele de la Olimpiada Naţională 2009, pag. 22.

Se ajunge la ecuaţia

$$(2') \qquad \begin{cases} f(x + y) = f(x) + f(y), \quad x, y \in \mathbb{R} \\ f(x^3) = x \cdot f(x), \quad x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

care are soluţie doar funcţiile de forma $f(x) = a \cdot x$, $x \in \mathbb{R}$, unde $a \in \mathbb{R}$ este o constantă arbitrară.

3. Cazul $p = 2$, $q = 1$

$$(3) \qquad \begin{cases} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f(x^3 + y^3) = x^2 \cdot f(x) + y^2 \cdot f(y) \end{cases}$$

Pentru $x = y = 0$ obţinem $f(0) = 0$.
Pentru $y = 0$ obţinem $f(x^3) = x^2 \cdot f(x)$ şi ecuaţia (3) se poate scrie sub forma $f(x^3 + y^3) = f(x^3) + f(y^3)$, adică:

$$(3') \qquad \begin{cases} f(x + y) = f(x) + f(y), \quad x, y \in \mathbb{R} \\ f(x^3) = x^2 \cdot f(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Avem:

$$\begin{aligned} f((x+1)^3) &= (x+1)^2 f(x+1) \Leftrightarrow f(x^3) + 3f(x^2) + 3f(x) + f(1) \\ &= (x^2 + 2x + 1)(f(x) + f(1)) \Leftrightarrow f(x^3) + 3f(x^2) + 3f(x) + f(1) \\ &= x^2 \cdot f(x) + x^2 \cdot f(1) + 2x \cdot f(x) + 2x \cdot f(1) + f(x) + f(1) \Leftrightarrow \\ 3f(x^2) &= x^2 \cdot f(1) + 2x \cdot f(x) + 2x \cdot f(1) - 2f(x). \end{aligned}$$

În ultima relaţie facem $x \to x + 1$ şi obţinem

$$\begin{aligned} 3(f(x^2) + 2f(x) + f(1)) = (x^2 + 2x + 1)f(1) + 2x \cdot f(x) + 2f(x) + 2x \cdot f(1) \\ + 2f(1) + 2x \cdot f(1) + 2f(1) - 2f(x) - 2f(1). \end{aligned}$$

Din ultimele două relaţii rezultă $f(x) = x \cdot f(1)$, $x \in \mathbb{R}$ şi, în concluzie, singurele soluţii ale ecuaţiei (3) sunt $f(x) = a \cdot x$, $x \in \mathbb{R}$, unde $a \in \mathbb{R}$ este o constantă arbitrară.

Din cazurile particulare tratate am putea bănui că, în general, singurele soluţii ale ecuaţiei

$$\text{(G)} \qquad \begin{cases} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f(x^{p+q} + y^{p+q}) = x^p \cdot f(x^q) + y^p \cdot f(y^q),\ x, y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

unde $p, q \in \mathbb{N}^*$ sunt numere naturale fixate, sunt doar funcţiile $f(x) = a \cdot x$, $x \in \mathbb{R}$, unde $a \in \mathbb{R}$ este o constantă arbitrară. Bănuiala este falsă după cum decurge din cazul $p = q = 2$, în care avem ecuaţia

$$\text{(4)} \qquad \begin{cases} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f(x^4 + y^4) = x^2 \cdot f(x^2) + y^2 \cdot f(y^2), \quad x, y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Notăm $x^2 = u \geq 0$, $y^2 = v \geq 0$ şi ecuaţia se scrie sub forma

$$f(u^2 + v^2) = u \cdot f(u) + v \cdot f(v), \quad u, v \geq 0.$$

Pentru $u = v = 0$ rezultă $f(0) = 0$.

Pentru $v = 0$ rezultă $f(u^2) = u \cdot f(u)$ şi ecuaţia devine:

$$\text{(4')} \qquad \begin{cases} f(u + v) = f(u) + f(v), & u, v \geq 0 \\ f(u^2) = u \cdot f(u), & u \geq 0 \end{cases}$$

La fel ca în cazul ecuaţiei (1) obţinem $f(x) = x \cdot f(1)$, $\forall\, x \geq 0$, iar soluţia generală a ecuaţiei (4) este

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot x, & x \geq 0 \\ \varphi(x), & x < 0, \end{cases}$$

unde $a \in \mathbb{R}$ este o constantă arbitrară în funcţia $\varphi : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$ este o funcţie arbitrară.

Soluţia generală a ecuaţiei (G) pare mai dificilă şi pentru rezolvarea ei ar fi necesară rezolvarea ecuaţiei

$$H : \begin{cases} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f(x + y) = f(x) + f(y), & x, y \in \mathbb{R} \\ f(x^{p+q}) = x^p f(x^q), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Bibliografie.

1. M. Kuczma, *An introduction to the theory of functional equations and inequalities*, Univ. Slaski, Warszawa, 1985.
2. V. Pop, *Ecuaţii funcţionale*, Ed. Mediamira, 2002.
3. Suplimentul G. M. aprilie 2009.

Conf. univ., Universitatea Tehnică, Cluj-Napoca

Inegalităţi condiţionate verificate de coeficienţii polinoamelor

Dan Ştefan Marinescu şi Ion Savu

Abstract. In this article we will establish some conditioned inequalities on the coefficient modules of some polynomials.

În cele ce urmează, ne propunem să stabilim câteva inegalităţi condiţionate, verificate de modulele coeficienţilor unor polinoame cu coeficienţi în mulţimea numerelor complexe. Un prim rezultat este cuprins în cele ce urmează.

Propoziţia 1. *Fie* $f \in C[X]$, $f = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$ *cu proprietatea că* $|f(z)| \leq 1$, $\forall\, z \in \mathbb{C}$, $|z| = 1$. *Atunci* $|a_0|^2 + |a_1|^2 + \cdots + |a_n|^2 \leq 1$.

Demonstraţia 1. Pentru orice $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ există $r_k \geq 0$ şi $\alpha_k \in [0, 2\pi)$ astfel ca $a_k = r_k(\cos\alpha_k + i\sin\alpha_k)$. Condiţia din enunţ devine:

$$\forall\, \alpha \in [0, 2\pi),$$

$$(1)\qquad \left|\sum_{k=0}^{n} r_k[\cos(\alpha_k + k\alpha) + i\sin(\alpha_k + k\alpha)]\right|^2 \leq 1 \Leftrightarrow \forall\, \alpha \in [0, 2\pi)$$

$$\left[\sum_{k=0}^{n} r_k \cos(\alpha_k + k\alpha)\right]^2 + \left[\sum_{k=0}^{n} r_k \sin(\alpha_k + k\alpha)\right]^2 \leq 1 \Leftrightarrow \forall\, a \in [0, 2\pi)$$

$$\sum_{k=0}^{n} r_k^2 + 2\sum_{0 \leq k < l \leq n} r_k r_l \cos(\alpha_k + k\alpha)\cos(\alpha_l + l\alpha)$$
$$+\, 2\sum_{0 \leq k < l \leq n} r_k r_l \sin(\alpha_k + k\alpha)\sin(\alpha_l + l\alpha) \leq 1 \Leftrightarrow \forall\, \alpha \in [0, 2\pi)$$

$$\sum_{k=0}^{n} r_k^2 + 2\sum_{0 \leq k < l \leq n} r_k r_l \cos(\alpha_k - \alpha_l + (k-l)\alpha) \leq 1.$$

Cum $\forall\, k, l \in \mathbb{N}$ cu $k \neq l$:

$$\int_0^{2\pi} \cos(\alpha_k - \alpha_l + (k-l)\alpha)d\alpha = \frac{1}{k-l}\sin(\alpha_k - \alpha_l + (k-l)\alpha)\Big|_0^{2\pi} = 0,$$

integrând pe $[0,2\pi]$ inegalitatea de la (1), suntem conduşi la $2\pi\sum\limits_{k=0}^{n} r_k^2 \leq 2\pi$, adică $\sum\limits_{k=0}^{n} r_k^2 \leq 1$, ceea ce constituie inegalitatea din enunţ.

Demonstraţia 2. Dacă $U_n = \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1\}$, se ştie că

$$\sum_{z\in U_n} z^k = \begin{cases} 0 & \text{dacă } k \text{ nu divide pe } n \\ n & \text{dacă } k \text{ divide pe } n \end{cases} \tag{1}$$

Fie $z \in \mathbb{C}$ cu $|z| = 1$, atunci $|f(z)| \leq 1$ ne conduce la $f(z)\overline{f(z)} \leq 1$ sau

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k z^k\right)\left(\sum_{j=0}^{n} \overline{a_j z^j}\right) \leq 1 \quad \text{sau} \quad \left(\sum_{k=0}^{n} a_k z^k\right)\left(\sum_{j=0}^{n} \overline{a_j}\frac{1}{z^j}\right) \leq 1,$$

de unde rezultă că $\sum\limits_{k,j=0}^{n} a_k\overline{a}_j z^{k-j} \leq 1$.

Cum ultima relaţie este adevărată pentru orice $z \in \mathbb{C}$, $|z| = 1$, conchidem că ea este validă şi pentru $z \in U_{n+1}$. De aici rezultă că $\sum\limits_{z\in U_{n+1}}\left(\sum\limits_{k,j=0}^{n} a_k\overline{a}_j z^{k-j}\right) \leq n+1$, ceea ce împreună cu (1) conduce la $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k\overline{a}_k \leq 1$ sau $\sum\limits_{k=0}^{n} |a_k|^2 \leq 1$.

Corolarul 2. *Dacă $f \in C[X]$, $f = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$ cu proprietatea că $|f(z)| \leq 1$, $\forall\, z \in \mathbb{C}$, $|z| = 1$, atunci:*

a) $\forall\, k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, $|a_k| \leq 1$

b) dacă $\exists\, k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ cu $|a_k| = 1$, $f = a_kx^k$.

Demonstraţie.

a) Este consecinţa imediată a Propoziţiei 1.

b) Se deduce din aceeaşi Propoziţie.

Propoziţia 1 aplicată la matrice conduce la următoarele două rezultate.

Corolarul 3. *Dacă $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ cu proprietatea că $|\det(A + zB) \leq 1$, $\forall\, z \in \mathbb{C}$ cu $|z| = 1$, atunci $|\det(A)| \leq 1$ şi $|\det B| \leq 1$* (Radu Gologan, G. M. 5-6/1998, problema 23931).

Soluţie. Se consideră în Corolarul 2, $f = \det(A + XB) = \det(A) + \cdots + \det(B)X^n$. Cum f îndeplineşte condiţiile din Corolarul 2, deducem că $|\det(A)| \leq 1$ şi $|\det(B)| \leq 1$.

Corolarul 4. Dacă $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ care verifică $A \cdot B = B \cdot A$, $\det(B) = 1$ şi $|\det(B + zA)| \leq 1$, $\forall\, z \in \mathbb{C}$ cu $|z| = 1$. Atunci $A^n = O_n$.

Demonstraţie. Notând cu $C = A \cdot B^{-1}$, inegalitatea din enunţ devine

$|\det(B - zA)| \le 1\ \forall z \in \mathbb{C}$ cu $|z| = 1 \Leftrightarrow |\det(I_n - zC)| \le 1\ \forall z \in \mathbb{C}$ cu $|z| = 1 \Leftrightarrow |\det(C - zI_n)| \le 1\ \forall z \in \mathbb{C}$ cu $|z| = 1$ de unde, din Corolarul 2, obţinem că polinomul caracteristic al matricei C este $f = (-1)^n x^n$, adică $C^n = O_n$ şi atunci, cum B^{-1} şi A comută, suntem conduşi la $A^n = O_n$.

Un alt rezultat de natura celui cuprins în Propoziţia 1 este următorul:

Propoziţia 5. Dacă $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$ şi $f \in \mathbb{C}[x]$, $gr(f) = n$, $f = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, atunci $|f(z)| \le |a_0 + a_n|$, $\forall z \in \mathbb{C}$ cu $|z| = 1$, dacă şi numai dacă $a_1 = a_2 = \cdots = a_{n-1} = 0$ şi $\dfrac{a_0}{a_n} \in [0, \infty)$.

Demonstraţie. *Suficienţa.* Dacă $a_1 = a_2 = \cdots = a_{n-1} = 0$ şi $\dfrac{a_0}{a_n} \in [0, \infty)$, atunci

$$\begin{aligned} |f(z)| = |a_nz^n + a_0| = |a_n| \cdot \left|z^n + \frac{a_0}{a_n}\right| &\le |a_n| \left(|z|^n + \left|\frac{a_0}{a_n}\right|\right) \\ \le |a_n|\left(1 + \frac{|a_0|}{|a_n|}\right) &= |a_n| + |a_0| = |a_n + a_0| \end{aligned}$$

pentru că $a_0 = \lambda a_n$ cu $\lambda \ge 0$.

Necesitatea. Fie $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $g(z) = a_1z + a_2z^2 + \cdots + a_{n-1}z^{n-1}$ şi $\varepsilon_k = \cos\dfrac{2k\pi}{n} + i\sin\dfrac{2k\pi}{n}$, $k = \overline{0, n-1}$.

Din enunţ $|a_0 + g(\varepsilon_k) + a_n|^2 \le |a_0 + a_n|^2$, de unde cu notaţia $a_0 + a_n = b_n$ suntem conduşi la $|b_n|^2 + |g(\varepsilon_k)|^2 + \overline{b}_n g(\varepsilon_k) + b_n\overline{g}(\varepsilon_k) \le |b_n|^2$ pentru orice $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Însumând aceste inegalităţi, şi ţinând seama că avem $\sum\limits_{k=0}^{n-1} g(\varepsilon_k) = 0$, suntem conduşi la $\sum\limits_{k=0}^{n-1} |g(\varepsilon_k)|^2 \le 0$, adică $g(\varepsilon_k) = 0$ pentru orice $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, şi în concluzie $g = 0$, adică $a_1 = a_2 = \cdots = a_{n-1} = 0$. Inegalitatea dată devine $|a_0 + a_nz^n| \le |a_0 + a_n|$, $\forall z \in \mathbb{C}$ cu $|z| = 1$, şi cum $a_n \ne 0$ obţinem $\left|z^n + \dfrac{a_0}{a_n}\right| \le \left|1 + \dfrac{a_0}{a_n}\right|$, $\forall z \in \mathbb{C}$ cu $|z| = 1$.

Dacă $c_n = \dfrac{a_0}{a_n}$, atunci din ultima inegalitate luând $z = \cos\alpha + i\sin\alpha$ cu $\alpha \in (0, 2\pi)$ şi $c_n = x + iy$ cu $x, y \in \mathbb{R}$ obţinem $x\cos n\alpha + y\sin n\alpha \le x$, $\forall \alpha \in (0, 2\pi)$, ceea ce ne conduce la $\sqrt{x^2 + y^2} \le x$, de unde $x \in (0, \infty)$ şi $y = 0$, adică $c_n \in [0, \infty)$, deci $\dfrac{a_0}{a_n} \in [0, \infty)$.

Cu aceasta, Propoziţia 5 este demonstrată.

O formă matriceală a acestui rezultat este cuprinsă în cele ce urmează.

Corolarul 6. *Dacă* $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $n \geq 2$, $A \cdot B = B \cdot A$, $\det(B) = 1$ *şi* $|\det(B + zA)| \leq |\det(B) + \det(A)|$ *pentru orice* $z \in \mathbb{C}$ *cu* $|z| = 1$, *atunci există* $a \in \mathbb{R}$ *astfel ca* $A^n = a \cdot B^n$.

Demonstraţie. Fie $C = A \cdot B^{-1}$. Atunci obţinem ca la demonstraţia Corolarului 4 că $|\det(C + zI_n)| \leq |1 + \det(C)|$, $\forall z \in \mathbb{C}$, cu $|z| = 1$, de unde conform cu Propoziţia 5, $\det(C + zI_n) = \det(C) + z^n$ cu $\det(C) \geq 0$, şi atunci

$$\det(C - zI_n) = \det(C) + (-1)^n z^n$$

deci $f = \det(C) + (-1)^n x^n$ este polinomul caracteristic al matricei C, de unde $(-1)^n (A \cdot B^{-1})^n = -\det(C)$ şi în consecinţă există $a \in \mathbb{R}$ astfel ca $A^n = a \cdot B^n$.

Rezultatul cuprins în Propoziţia 5 oferă şi o caracterizare prin inegalităţi a poligoanelor regulate. Acest fapt este cuprins în cele ce urmează.

Corolarul 7. *Dacă* $C(O, r_1)$, $C(O, r_2)$ *sunt două cercuri, iar* $B_1 B_2 \ldots B_n$ *este un poligon convex înscris în* $C(O, r_2)$, *atunci* $B_1 B_2 \ldots B_n$ *este poligon regulat dacă şi numai dacă pentru orice* $M \in C(O, r_1)$ *are loc inegalitatea*

$$MB_1 \cdot MB_2 \cdot \ldots \cdot MB_n \leq r_1^n + r_2^n.$$

Demonstraţie. Vom admite că originea planului complex este în O şi vom nota $b_1, b_2, \ldots, b_n$ afixele pentru $B_1, B_2, \ldots, B_n$.
Necesitatea. Dacă $B_1 B_2 \ldots B_n$ este poligon regulat atunci $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sunt rădăcinile ecuaţiei $z^n = a$ cu $a \in \mathbb{C}$ şi $|a| = r_2^n$. Pentru un $M \in C(O, r_1)$ de afix m avem:

$$\begin{aligned} MB_1 \cdot MB_2 \cdot \ldots \cdot MB_n &= |m - b_1| \cdot |m - b_2| \cdot \ldots \cdot |m - b_n| \\ &= |m^n + (-1)^n b_1 \cdot \ldots \cdot b_n| \\ &\leq |m|^n + |b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_n| = r_1^n + r_2^n. \end{aligned}$$

Suficienţa. Pentru orice $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ fie $b_k = r_2(\cos\alpha_k + i\sin\alpha_k)$ cu $\alpha_k \in (0, 2\pi)$. Rotind în jurul lui O punctele $B_1, B_2, \ldots, B_n$, cu unghiul $\alpha = \pi - \dfrac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}{n}$, obţinem poligonul $B_1' B_2' \ldots B_n'$ ale cărui afixe verifică $b_k' = b_k \cdot t$ pentru oricare $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, unde $t = \cos\alpha + i\sin\alpha$. În mod evident $b_1' \cdot b_2' \cdot \ldots \cdot b_n' = r_2^n (-1)^n$. Cum $|m - b_1| \cdot |m - b_2| \cdot \ldots \cdot |m - b_n| \leq r_1^n + r_2^n$, $\forall m \in \mathbb{C}$, cu $|m| = r_1$, rezultă că $\left|z - \dfrac{b_1'}{r_1}\right| \cdot \ldots \cdot \left|z - \dfrac{b_n'}{r_1}\right| \leq 1 + \dfrac{|r_2|^n}{r_1}$, $\forall z \in \mathbb{C}$, cu $|z| = 1$. Atunci, conform cu Propoziţia 5, deducem că sumele $s_1, s_2, \ldots, s_n$ corespunzătoare cu numerele $b_1', b_2', \ldots, b_n'$ sunt nule şi, în consecinţă, poligonul $B_1' B_2', \ldots, B_n'$ este poligon regulat şi atunci $B_1 B_2 \ldots B_n$ are aceeaşi calitate.

Tot în spiritul celor de mai sus are loc şi următorul rezultat:

Propoziţia 8. *Fie* $f \in \mathbb{C}[X]$*,* $gr(f) = n$*,* $n \in \mathbb{N}^*$*,* $f = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$ *astfel încât* $|f(z)| = 1$*,* $\forall\, z \in \mathbb{C}$ *cu* $|z| = 1$*, atunci* $a_0 = a_1 = \cdots = a_{n-1} = 0$ *şi* $|a_n| = 1$.

Demonstraţia 1. Ca în demonstraţia 1 din Propoziţia 1, există $r_0, r_1, \ldots, r_n \geq 0$, $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in [0, 2\pi)$ astfel încât $a_k = r_k(\cos\alpha_k + i\sin\alpha_k)$, $\forall\, k \in \{0, 1, ..., n\}$ şi $\sum\limits_{k=0}^{n} r_k^2 + 2 \sum\limits_{0 \leq k < e \leq n} r_k r_e \cos(\alpha_k - \alpha_e + (k - e)\alpha) = 1$, $\forall\, \alpha \in [0, 2\pi)$ de unde, prin înmulţirea cu $\cos nx$ şi integrând de la 0 la 2π, obţinem $r_0 r_n = 0$. Cum $r_n > 0$, deducem că $r_0 = 0$, adică $a_0 = 0$, şi atunci egalitatea din enunţ devine $|a_nz^{n-1} + \cdots + a_1| = 1$ pentru orice $z \in \mathbb{C}$ cu $|z| = 1$. Repetând raţionamentul, ajungem la concluzia Propoziţiei 8.

Demonstraţia 2. (După o idee a lui V. Pop). Din $|f(z)| = 1$, $\forall\, z \in \mathbb{C}$ cu $|z| = 1$, suntem conduşi la $(a_0 + a_1z + \cdots + a_nz^n)(\overline{a}_0 + \overline{a}_1\overline{z} + \cdots + \overline{a}_n\overline{z}^n) = 1$, $\forall\, z \in \mathbb{C}$ cu $|z| = 1$. Cum $\overline{z} = \dfrac{1}{z}$, egalitatea devine $(a_0 + a_1z + \cdots + a_nz^n)(\overline{a}_0z^n + \overline{a}_1z^{n-1} + \cdots + \overline{a}_n) = z^n$ pentru orice $z \in \mathbb{C}$ cu $|z| = 1$, care conduce, prin identificarea coeficienţilor, la egalităţile $a_0\overline{a}_n = a_1\overline{a}_n = \cdots = a_{n-1}\overline{a}_n = 0$, de unde concluzia este imediată.

Sub formă matriceală, Propoziţia 8 se prezintă astfel:
(*V. Pop, Problema* 3 *de la O. N. M.* 2009*, clasa a XI-a*)

Corolarul 9. *Dacă* $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$*,* $A \cdot B = B \cdot A$*,* $\det(B) \neq 0$ *şi* $|\det(Az + B)| = 1$ *pentru orice* $z \in \mathbb{C}$ *cu* $|z| = 1$*, atunci* $A^n = O_n$.

Demonstraţie. Se aplică Propoziţia 8 şi acelaşi reţionament ca în demonstraţia Corolarului 4.

În final, propunem cititorului câteva aplicaţii ale rezultatelor din acest articol.

A1. Dacă $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ astfel ca $|a_nz^n + \cdots + a_1z + a_0| \leq 1$, $\forall\, z \in \mathbb{C}$ cu $|z| = 1$, atunci $|a_k| \leq 1$ pentru orice $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$.
(*Radu Gologan, O. N. M. Suceava, enunţ parţial)*

A2. Fie $p \in \mathbb{C}[X]$, $p = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$. Să se arate că dacă $|p(z)| = 1$, $\forall\, z \in \mathbb{C}$ cu $|z| = 1$, atunci $p = X^n$.
(*V. Popa, G. M.* 4/2002 *sau Patrik Popescu-Pampu, G. M.* 1985)

A3. Triunghiul ABC este un triunghi înscris în cercul $C(O, 1)$. Să se arate că triunghiul ABC este echilateral dacă şi numai dacă pentru orice $M \in C(O, 1)$ are loc inegalitatea $MA \cdot MB \cdot MC \leq 2$.

A4. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ o matrice cu proprietatea că $|\det(I_n + \lambda A)| \leq 1$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$. Să se arate că există $k \in \mathbb{N}^*$ cu $A^k = O_n$.

(*Ion Savu, Chindia Matematica nr.* 1/2001, *L.* 75)

A5. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $n \geq 2$, astfel încât $|\det(I_n + zA)| \leq |1 + \det(A)|$, $\forall z \in \mathbb{C}$ cu $|z| = 1$. Arătaţi că:

a) $\det(A) \in [0, \infty)$;

b) există $a \in \mathbb{R}$, astfel încât $A^n = aI_n$.

(*Marius Ghergu, G. M. nr.* 4/2002)

Profesor, Liceul teoretic "Iancu de Hunedoara", Deva
Profesor, Colegiul Naţional "Mihai Viteazul", Bucureşti

Teoreme de factorizare şi aplicaţii

Costel Chiteş

Abstract. The aim of this paper is to establish connections between some factorization theorems on quotient sets and on groups.

În acest articol vom prezenta teoreme de factorizare în cadrul mulţimilor cât şi în cel al grupurilor, precum şi legătura dintre ele.

I. Vom reaminti câteva rezultate legate de mulţimi factor.

Definiţia 1. Fie $f : A \to B$ o funcţie. O funcţie $r : B \to A$ se numeşte retractă (sau inversă la stânga) a lui f, dacă $r \circ f = 1_A$.

Definiţia 2. Fie $f : A \to B$ o funcţie. O funcţie $s : B \to A$ se numeşte secţiune (sau inversă la dreapta) a lui f dacă $f \circ s = 1_B$.

Propoziţia 1. *Fie $f : A \to B$ o funcţie cu $A \neq \emptyset$. Sunt echivalente următoarele afirmaţii:*

a) f este injectivă;

b) f admite cel puţin o retractă;

c) pentru orice mulţime X şi orice funcţii $g, h : X \to A$ avem $f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h$ (simplificare la stânga).

Propoziţia 2. *Fie $f : A \to B$ o funcţie. Sunt echivalente următoarele afirmaţii:*

a) f este surjectivă;

b) f admite cel puţin o secţiune;

c) pentru orice mulţime Y şi orice funcţii $g, h : B \to Y$ avem $g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h$ (simplificare la dreapta).

Definiţia 3. Fie $f = (A, B, F)$ o relaţie funcţională, unde $F \subseteq A \times B$ este graficul relaţiei. $Ker\, f = F^{-1} \circ F = \{(x_1, x_2) \in A \times A | f(x_1) = f(x_2)\}$ se numeşte nucleul lui f.

Observaţii.

1) $Ker\, f$ este o relaţie de echivalenţă pe A;

2) $A/_{Ker\, f} = \left\{f^{-1}(y) \,|\, y \in f(A)\right\}$;

3) Dacă $p_{Ker\, f} : A \to A/_{Ker\, f}$ este surjecţia canonică, atunci $Ker\, p_{Ker\, f} = Ker\, f$.

Teorema 1. (Factorizarea printr-o surjecţie).
Fie $f : A \to B$ o funcţie şi $g : A \to C$ o funcţie surjectivă. Există şi este unică o funcţie $h : C \to B$ astfel încât $f = h \circ g$ dacă şi numai dacă $Ker\, g \subseteq Ker\, f$.

Demonstraţie.
"$\Rightarrow$" Fie $(x_1, x_2) \in Ker\, g \Rightarrow g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow h(g(x_1)) = h(g(x_2)) \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow (x_1, x_2) \in Ker\, f$.
"$\Leftarrow$" Cum g este surjectivă $\Rightarrow \exists\, s : C \to A$ astfel încât $g \circ s = 1_C$. Definim funcţia $h = f \circ s$. Din $g \circ s = 1_C \Rightarrow g \circ s \circ g = g$. Fie $x \in A$, atunci $(g \circ s \circ g)(x) = g(x)$ sau $g((s \circ g)(x)) = g(x) \Rightarrow (f \circ s \circ g)(x) = f(x)$, sau $(h \circ g)(x) = f(x)$. Deci $f = h \circ g$.
Unicitatea lui h. Dacă există $h' : C \to B$ astfel încât $f = h' \circ g$, rezultă $h' \circ g = h \circ g$ şi simplificând la dreapta (g este surjectivă), rezultă $h = h'$. $\square$

Observaţii.
1) Dacă $Ker\, g = Ker\, f$, atunci h este injectivă;
2) Dacă f este surjectivă, atunci h este surjectivă.

1) Dacă $h(c_1) = h(c_2)$. Din g surjectivă, rezultă că există $a_1, a_2 \in A$ astfel încât $c_1 = g(a_1), c_2 = g(a_2)$. Deci $(h \circ g)(a_1) = (h \circ g)(a_2) \Rightarrow f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow (a_1, a_2) \in Ker\, f = Ker\, g \Rightarrow g(a_1) = g(a_2) \Rightarrow c_1 = c_2$, deci h este injectivă.
2) $f = h \circ g$ surjectivă $\Rightarrow h$ surjectivă. $\square$

Prin dualitate se enunţă

Teorema 2. (Factorizarea unei funcţii printr-o injecţie)
Fie $f : B \to A$ o funcţie şi $g : C \to A$ o funcţie injectivă. Există şi este unică o funcţie $h : B \to C$ astfel încât $f = g \circ h$ dacă şi numai dacă $\mathrm{Im} f \subseteq \mathrm{Im} g$.

Demonstraţia se realizează ca în cazul teoremei 1 (a se vedea [4]).

Un corolar al teoremei 1 îl reprezintă

Teorema 3. *Dacă $f : A \to B$ este o funcţie, atunci există o bijecţie $\overline{f} : A/_{Ker\, f} \to f(A)$ astfel încât $f = i \circ \overline{f} \circ p_{Ker\, f}$, unde $i : f(A) \to B$, $i(y) = y$ este aplicaţia de incluziune.*

Demonstraţie. Cum aplicaţia $p_{Ker\, f}$ este surjectivă şi $Ker\, p_{Ker\, f} = Ker\, f$, aplicând teorema 1, rezultă că există şi este unică aplicaţia injectivă $h : A/_{Ker\, f} \to B$ astfel încât $f = h \circ p_{Ker\, f}$. Cum $\mathrm{Im} h = \mathrm{Im} f$ şi h injectivă, rezultă că funcţia

$$\overline{f} : A/_{Ker\, f} \to f(A),\ \overline{f}(Ker\, f < x >) = h(Ker\, f < x >)$$

este bijectivă şi $h = i \circ \overline{f}$, unde i este aplicaţia de incluziune.
Deci $f = i \circ \overline{f} \circ p_{Ker\, f}$. $\square$

Observaţie. Teorema 3 ne arată că imaginile unei mulţimi A prin toate funcţiile cu domeniul A sunt epuizate, până la o bijecţie, de mulţimile cât ale lui A.

Exemplu. Se consideră mulţimile $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{a, b, c, d\}$ şi funcţia $f : A \to B$ definită prin tabelul

X	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	a	a	a	b	b	c

Atunci

$$\begin{aligned}
F &= \{(1,a),(2,a),(3,a),(4,b),(5,b),(6,c)\};\\
F^{-1} &= \{(a,1),(a,2),(a,3),(b,4),(b,5),(c,6)\};\\
Ker\, f &= \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3),\\
&\quad (4,4),(4,5),(5,4),(5,5),(6,6)\};\\
A/_{Ker\, f} &= \{\{1,2,3\},\{4,5\},\{6\}\},\ \mathrm{Im} f = \{a,b,c\}.
\end{aligned}$$

Între aceste mulţimi evident există o bijecţie.

II. În cadrul grupurilor întâlnim noţiunea de nucleu al unui morfism de grupuri. Dacă $(G,\cdot)$, $(H,\cdot)$ sunt grupuri şi $f : G \to H$ este un morfism de grupuri, $Ker\, f = \{x \in G \,|\, f(x) = 1\}$ este un subgrup normal al lui G, numit nucleul lui f. Morfismul f fiind în particular funcţie, se pune întrebarea ce legătură există între $Ker\, f$ de la funcţii şi $Ker\, f$ de la morfismele de grupuri? Pentru a răspunde la întrebare, vom analiza un morfism de grupuri $f : G \to H$. Notăm $N = Ker\, f \lhd G$; N induce o relaţie de echivalenţă (chiar congruenţă) pe G notată prin

$$\begin{aligned}
\rho_N : (x_1,x_2) \in \rho_N \subseteq G\times G \Leftrightarrow x_1\cdot x_2^{-1} \in N \Leftrightarrow f(x_1\cdot x_2^{-1}) = 1\\
\Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow (x_1,x_2) \in F^{-1}\circ F = Ker\, f,
\end{aligned}$$

unde am notat $f = (G,H,F)$. Deci mulţimea G subiacentă grupului $(G,\cdot)$ se factorizează ca în cazul teoriei mulţimilor, unde funcţionează teoremele 1, 2, 3 prezentate în paragraful (Ens).

Teorema 4. (Teorema factorului)
Fie $f : G \to H$ un morfism de grupuri, $N \lhd G$ şi $K = Ker\, f$, $\pi : G \to G/N$, $\pi(x) = xN$ surjecţia canonică. Dacă $N \subseteq K$, atunci există un unic morfism de grupuri $\overline{f} : G/N \to H$ astfel încât $f = \overline{f}\circ\pi$. Mai mult, avem:
a) $\overline{f}$ este epimorfism dacă şi numai dacă f este epimorfism;
b) $\overline{f}$ este monomorfism dacă şi numai dacă $K = N$;
c) $\overline{f}$ este izomorfism dacă şi numai dacă $K = N$ şi f este epimorfism.

Demonstraţie. Fie $aN \in G/N$. Definim $\overline{f}(aN) = f(a)$. Dacă $aN = bN$ atunci $a^{-1}b \in N \subseteq K$, deci $f(a^{-1}b) = 1$ sau $f(a) = f(b)$. Deci $\overline{f}$ este bine definită.

Din $\overline{f}(aN\cdot bN) = \overline{f}(abN) = f(ab) = f(a)f(b) = \overline{f}(aN)\overline{f}(bN)$, rezultă că $\overline{f}$ este morfism de grupuri; $f = \overline{f}\circ\pi$.

a) Arătăm că $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im}\overline{f}$. Fie $y \in \mathrm{Im} f$. Atunci $\exists\, a \in G$ astfel încât $y = f(a) = \overline{f}(aN)$, deci $y \in \mathrm{Im}\overline{f}$. Reciproc, dacă $y \in \mathrm{Im}\overline{f}$, atunci $\exists\, aN \in G/N$ astfel încât $y = \overline{f}(aN) = f(a)$, deci $y \in \mathrm{Im} f$; $Ker\,\overline{f} = \{aN \mid f(a) = 1\} = \{aN \mid a \in K\} = K/N$.

b) $\overline{f}$ este monomorfism dacă şi numai dacă $Ker\,\overline{f} = \{1\} \Leftrightarrow K = N$.

c) Se aplică a), b). $\square$

Teorema 5. (Teorema întâi de izomorfism)
Dacă $f : G \to H$ este un morfism de grupuri cu $K = Ker\, f$, atunci $G/K \cong Im f$.

Demonstraţie. Aplicăm teorema factorului ($T4$) pentru $N = K$ şi $\overline{f} : G \to \mathrm{Im} f$, $\overline{f}(x) = f(x)$, $\forall\, x \in G$. $\square$

III. Aplicaţii

1) Se consideră morfismul de grupuri $f : (\mathbb{R}, +) \to (C^*)$, $f(x) = \cos 2\pi x + i \sin 2\pi x$. $Kerf = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 1\} = \mathbb{Z}$. $\mathrm{Im} f = \{z \in \mathbb{C}^* \mid |z| = 1\} \overset{not}{=} D$. Atunci, aplicând teorema întâi de izomorfism, obţinem că $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong D$. Se observă că $|D| = C$.

2) Se consideră morfismul de grupuri

$$g : (\mathbb{Q}, +) \to D,\ g(x) = \cos 2\pi x + i \sin 2\pi x,$$

unde D a fost definit în exemplul 1.
$Ker\, g = \mathbb{Z}$, $\mathrm{Im} g = \{z \in C^* \mid \exists\, n \in \mathbb{N}$ a.î. $z^n = 1\} \overset{not}{=} V$, numit grupul rădăcinilor complexe ale unităţii. Observăm că $|V| = \chi_0$. Atunci, aplicând teorema întâi de izomorfism, obţinem că $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \cong V$.

3) Fie K un corp, $n \in \mathbb{N}^*$ şi morfismul surjectiv $\det : GL_n(K) \to K^*$. Nucleul se notează cu $SL_n(K) = \{A \in GL_n(K) \mid \det A = 1\}$ şi se numeşte grupul liniar special de grad n peste K. $SL_n(K) \triangleleft GL_n(K)$ şi aplicând teorema întâi de izomorfism obţinem $GL_n(K)/_{SL_n(K)} \cong K^*$.

În particular, pentru K un corp finit cu q elemente, obţinem $|SL_n(K)| = |GL_n(K)|/q - 1$.

4) Fie $(G, \cdot)$ un grup şi $\alpha : G \to G$ un automorfism, $G \xrightarrow{\alpha^{-1}} G \xrightarrow{\pi} G/H$, unde π este surjecţia canonică

$$Ker\,(\pi \circ \alpha^{-1}) = \{x \in G \mid \pi(\alpha^{-1}(x)) = 1\} = \{x \in G \mid \alpha^{-1}(x) \in H\} = \alpha(H).$$

Cum $\pi \circ \alpha^{-1}$ este epimorfism, aplicând teorema întâi de izomorfism obţinem că $G/\alpha(H) \cong G/H$.

5) Pentru $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, să se determine subgrupurile lui $\mathbb{Z}_n$. Fie $H \leq \mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}\big/n\mathbb{Z}$. Conform teoremei de corespondenţă, $H = d\mathbb{Z}\big/n\mathbb{Z}$ unde $n\mathbb{Z} \subseteq d\mathbb{Z}$, deci

$d|n$, $d \in \mathbb{N}^*$. Aplicând teorema 3 de izomorfism, avem $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}\Big/ d\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}/_{d\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}_d$

Conform teoremei lui Lagrange, $\left|d\mathbb{Z}\big/n\mathbb{Z}\right| = |\mathbb{Z}_n|\big/[\mathbb{Z}_n : H] = n/d$ deoarece $[\mathbb{Z}_n : H] = |\mathbb{Z}_d| = d$. H este ciclic şi $H =< \widehat{d} >$, unde $\widehat{d} = d + n\mathbb{Z}$.

6) Să se determine laticea subgrupurilor grupului $\mathbb{Z}_{18}$. Subgrupurile H ale lui $\mathbb{Z}_{18}$ sunt de forma $d\mathbb{Z}\big/18\mathbb{Z}$ unde $d \in \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$.

Obţinem:
$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & 9\mathbb{Z}/_{18\mathbb{Z}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ 6\mathbb{Z}/_{18\mathbb{Z}} & & 2\mathbb{Z}/_{18\mathbb{Z}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ 2\mathbb{Z}/_{18\mathbb{Z}} & \longrightarrow & \mathbb{Z}_{18} \end{array}$$

7) Dacă G este un grup ciclic, atunci orice subgrup şi orice grup factor al său este ciclic. Se utilizează (ex. 6) şi structura subgrupurilor lui $\mathbb{Z}$ şi a subgrupurilor factor ale sale. Se ştie că orice grup ciclic este izomorf fie cu $\mathbb{Z}$, fie cu un $\mathbb{Z}_n$.

Bibliografie.

1. C. Năstăsescu, *Introducere în teoria mulţimilor*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1974.
2. C. Năstăsescu, *Inele, module, categorii*, Editura Academiei, Bucureşti, 1976.
3. D. Popescu, C. Vraciu, *Elemente de teoria grupurilor finite*, Ed. Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1986.
4. I. Purdea, Ioana Pop, *Algebră*, editura GIL, Zalău, 2003.
5. J. Rotman, *Advanced Modern Algebra*, Prentice Hall, 2003.

Profesor drd., Colegiul Naţional "T. Vianu", Bucureşti

Asupra problemei M.7 din revista Kvant

D. M. Bătineţu-Giurgiu

Abstract. This article presents some generalizations of the $M7$ problem from the Kvant journal.

Problema M.7 din revista Kvant are următorul enunţ:

1. *Fie a, b, c lungimile laturilor unui triunghi. Să se demonstreze că:*

$$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c}\geq 3. \tag{1}$$

Soluţie. Cu notaţiile $x=b+c-a$, $y=c+a-b$, $z=a+b-c$, folosind ipoteza, deducem că $x,y,z>0$ şi $a=\dfrac{y+z}{2}$, $b=\dfrac{z+x}{2}$, $c=\dfrac{x+y}{2}$. Atunci avem:

$$\begin{aligned}&\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c}=\frac{y+z}{2x}+\frac{z+x}{2y}+\frac{x+y}{2z}\\&=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)+\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)+\left(\frac{z}{y}+\frac{y}{z}\right)\right]\geq\frac{1}{2}(2+2+2)=3,\end{aligned}$$

ceea ce trebuia demonstrat.

În continuare vom da o nouă soluţie care se pretează la generalizări. Notând cu s membrul stâng al inegalităţii de demonstrat, avem:

$$\begin{aligned}2s+3&=\left(\frac{2a}{b+c-a}+1\right)+\left(\frac{2b}{c+a-b}+1\right)+\left(\frac{2c}{a+b-c}+1\right)\\&=(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{c+a-b}+\frac{1}{a+b-c}\right)\\&=((b+c-a)+(c+a-b)+(a+b-c))\left(\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{c+a-b}+\frac{1}{a+b-c}\right).\end{aligned}$$

Aplicând inegalitatea dintre media aritmetică şi media armonică, vom obţine inegalitatea:

$$2s+3\geq 9\Leftrightarrow s\geq 3,$$

adică inegalitatea de demonstrat.

Avem egalitate dacă $a=b=c$, adică atunci când triunghiul este echilateral.

Consecinţă. În orice triunghi ABC avem că $R \geq 2r$, notaţiile fiind cele uzuale. Într-adevăr,

$$\begin{aligned}\frac{R}{2r} &= \frac{abc}{4s}\cdot\frac{p}{2s} = \frac{abcp}{8p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{abc}{(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}\\ &= \frac{1}{4}\left(1+\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c}\right)\underset{(1)}{\geq}\frac{1}{4}(1+3)=1,\end{aligned}$$

adică $R \geq 2r$, cu egalitate doar în cazul triunghiului echilateral. Aceasta este inegalitatea lui Euler.

O generalizare a inegalităţii (1) este:

2. *Dacă a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi, atunci*

$$\frac{a}{b+c-u\cdot a}+\frac{b}{c+a-u\cdot b}+\frac{c}{a+b-u\cdot c}\geq\frac{3}{2-u},\quad \forall u\in[0,1]. \tag{2}$$

Soluţie. Notând cu $s(u)$ membrul stâng al inegalităţii de demonstrat, avem:

$$\begin{aligned}(u+1)s(u)+3 &= \frac{a(u+1)}{b+c-u\cdot a}+1+\frac{b(u+1)}{c+a-u\cdot b}+1+\frac{c(u+1)}{a+b-u\cdot c}+1\\ &= (a+b+c(\left(\frac{1}{b+c-u\cdot a}+\frac{1}{c+a-u\cdot b}+\frac{1}{a+b-u\cdot c}\right)\\ &= \frac{1}{2-u}[(b+c-u\cdot a)+(c+a-u\cdot b)+(a+b-u\cdot c)]\\ &\cdot\left(\frac{1}{b+c-u\cdot a}+\frac{1}{c+a-u\cdot b}+\frac{1}{a+b-u\cdot c}\right).\end{aligned}$$

Aplicând acum inegalitatea dintre media aritmetică şi media armonică, obţinem:

$$(u+1)s(u)+3\geq\frac{9}{2-u}\Leftrightarrow(u+1)s(u)\geq\frac{3(1+u)}{2-u}\Leftrightarrow s(u)\geq\frac{3}{2-u},$$

adică are loc inegalitatea de demonstrat.

A doua generalizare a inegalităţii (1) ne este dată de:

Teorema 1. *Fie $A_1A_2\ldots A_n$, $n \geq 3$, un poligon convex având lungimile laturilor a_k, $k=\overline{1,n}$ şi perimetrul p_n. Atunci avem:*

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{p_n-v\cdot a_k}\geq\frac{n}{n-v},\quad \forall v\in[0,2]. \tag{3}$$

Demonstraţie. Fie $s_n(v) = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{a_k}{p_n - v \cdot a_k} > 0$. Atunci,

$$v \cdot s_n(v) + n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{v \cdot a_k}{p_n - v \cdot a_k} + 1 \right) = p_n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p_n - v \cdot a_k}$$
$$= \frac{1}{n-v} \left(\sum_{k=1}^{n} (p_n - v \cdot a_k) \right) \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p_n - v \cdot a_k} \right),$$

de unde folosind inegalitatea dintre media aritmetică şi cea armonică, găsim că

$$v \cdot s_n(v) + n \geq \frac{n^2}{n-v} \Leftrightarrow v \cdot s_n(v) \geq \frac{nv}{n-v} \Leftrightarrow s_n(v) \geq \frac{v}{n-v}.$$

Aşadar, are loc relaţia (3), ceea ce demonstrează teorema. Deoarece am aplicat inegalitatea dintre media aritmetică şi media armonică, vom avea egalitate în (3) dacă şi numai dacă $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Aplicaţia 1. Pentru $n = 3$ şi $v = 2$ se obţine relaţia (1).

Aplicaţia 2. Pentru $n = 4$ şi $v = 2$ se obţine că într-un patrulater convex de laturi a, b, c, d are loc relaţia:

$$\frac{a}{b+c+d-a} + \frac{b}{c+d+a-b} + \frac{c}{d+a+b-c} + \frac{d}{a+b+c-d} \geq 2.$$

Aceasta este problema 25780 propusă de către D. M. Bătineţu-Giurgiu în Gazeta Matematică.

Observaţia 1. Teorema demonstrată mai sus s-ar putea enunţa astfel:

Dacă $a_k \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall\, k = \overline{1,n}$, $n \geq 2$, $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ *şi* $v \in [0,2]$, *atunci*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{s_n - v \cdot a_k} \geq \frac{n}{n-v},$$

cu egalitate, dacă şi numai dacă $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Observaţia 2. Utilizând faptul că funcţia $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{s - a \cdot x}$, unde $a, s > 0$ şi D interval convenabil ales încât $s - ax > 0$, $\forall\, x \in D$, este convexă, pe baza inegalităţii lui Jensen se pot deduce inegalităţile (1), (2), (3).

Bibliografie.

1. M. D. Bătineţu-Giurgiu, *Asupra unei probleme de la concursul de matematică "Alexandru Myller" din 2003*, Iaşi, Gazeta Matematică nr. 12/2007, pag. 628-632.
2. M. D. Bătineţu-Giurgiu, *O inegalitate şi aplicaţiile sale din Gazeta Matematică*, Revista Sinus, An IV, Nr. 2 (13)/2009, pag. 9-13.

Argument 12

Vânătoarea de triunghiuri echilaterale

Gheorghe Fătu

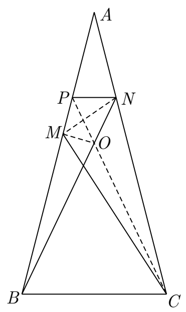
Abstract. This paper presents two classical problems belonging to the "folklore" of geometry.

Printre pasionaţii de geometrie plană este răspândită expresia "vânătoarea de patrulatere inscriptibile", cu semnificaţia că, dacă într-o figură geometrică, mai complicată, există un patrulater inscriptibil, cel mai important pas spre rezolvarea problemei este de a-l găsi (vâna). Pentru identificarea lui este necesară o singură relaţie (egalitate de unghiuri, unghiuri suplementare, etc.) iar consecinţele sunt alte câteva relaţii.

În această lucrare prezentăm două probleme clasice, din folclorul geoemtriei, probleme care necesită soluţii ingenioase. Unele din aceste soluţii se bazează pe observarea sau construcţia unor triunghiuri echilaterale, care odată "vânate" problema este rezolvată.

Problema 1. *Pe laturile AB şi AC ale triunghiului isoscel ABC cu unghiurile $\widehat{B} = \widehat{C} = 80°$, se consideră punctele M şi N astfel ca $\widehat{BCM} = 50°$ şi $\widehat{CBN} = 60°$. Să se determine măsura unghiului $\widehat{AMN}$.*

Soluţie. Ideea esenţială este de a duce $NP \| CB$, $P \in (AB)$. Dacă notăm $\{O\} = BN \cap CP$. Se observă triunghiurile echilaterale BOC şi PON (le-am vânat).



Triunghiul MBC este isoscel: $\widehat{M} = 180° - \widehat{B} - \widehat{C} = 180° - 80° - 50° = 50° = \widehat{C}$ şi atunci $MB = BC = OB$, deci triunghiul MBO este isoscel şi $\widehat{OMB} = \dfrac{180° - \widehat{MBO}}{2} = \dfrac{180° - 20°}{2} = 80°$ (triunghiurile ABC şi BOM sunt asemenea).

Avem:

$$\widehat{POM} = 180° - \widehat{PON} - \widehat{MOB} = 40°$$
$$\widehat{MPO} = 180° - \widehat{PBC} - \widehat{OCB} = 40°,$$

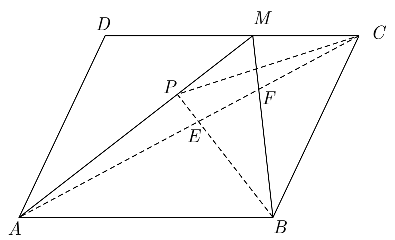
deci triunghiul PMO este isoscel şi $MP = MO$.
Triunghiul PNO fiind echilateral avem $NP = NO$ şi atunci triunghiurile MPN şi MON sunt congruente (P şi O sunt simetrice faţă de dreapta MN).
În consecinţă $\widehat{NMO} = 90° - \widehat{MOP} = 90° - 40° = 50°$ şi

$$\widehat{AMN} = 180° - \widehat{NMO} - \widehat{OMB} = 180° - 50° - 80° = 50°.$$

Menţionăm că în [1] problema are trei soluţii, toate diferite de soluţia dată aici.

Problema 2. Se consideră paralelogramul $ABCD$ cu unghiul $\widehat{A}$ de $80°$. Bisectoarea unghiului A taie latura CD în M. Dacă $AM = AB$, să se determine măsura unghiului $\widehat{MAC}$.

Soluţie. Ideea esenţială este de a duce BP, $P \in (AM)$ astfel ca $\widehat{ABP} = 40° = \widehat{PAB}$, deci de a construi triunghiul isoscel APB.



Triunghiurile ADM şi APB sunt congruente (isoscele cu unghiurile la vârf $\widehat{D} = \widehat{P} = 100°$ şi $AB = AM$). Obţinem $PB = AD = BC$ şi în triunghiul PBC, isoscel cu $BP = BC$ mai avem $\widehat{PBC} = 100° - \widehat{ABP} = 100° - 40° = 60°$, deci triunghiul PBC este echilateral (l-am vânat!). Mai avem $PC = PA$, deci triunghiul APC este isoscel şi

$$\widehat{MAC} = \widehat{PAC} = \frac{180° - \widehat{APB} - \widehat{CPB}}{2} = \frac{180° - 100° - 60°}{2} = 10°.$$

Mai putem observa următoarele:

– $\triangle MPB \equiv \triangle MCB$ cu unghiul $\widehat{PMB} = 70°$, $\widehat{MPB} = 80°$, $\widehat{PBM} = 30°$;

– punctele P şi C sunt simetrice faţă de dreapta BM;

– patrulaterul $BCME$ este inscriptibil ($\widehat{BMC} = \widehat{BEC} = 70°$, unde $AC \cap BP = \{E\}$);

– patrulaterul $PEFM$ este inscriptibil ($\widehat{PMF} = \widehat{FEB} = 70°$, unde $MB \cap AC = \{F\}$).

Menţionăm că Problema 2 aparţine profesorului Mihai Preda din Constanţa şi enunţul se află în [2].

Bibliografie.

1. M. Pimsner, S. Popa, *Probleme de geometrie elementară*, EDP, 1979 (problema 30).
2. GM 11/2007.

Nota redacţiei

Profesorul $\boxed{\text{Gheorghe Fătu}}$ a fost mulţi ani profesor şi director al liceului "Gheorghe Şincai", Baia Mare, contribuind la prestigiul de care se bucură azi liceul reprezentativ al judeţului Maramureş.

Lecţiile ţinute la clasă, la sesiunile ştiinţifice ale cadrelor didactice, la taberele de matematică, au rămas modele de competenţă, claritate, eleganţă, pentru toţi elevii ce au avut norocul să facă ore cu domnia sa şi pentru toţi colegii.

Aplicaţii ale inegalităţii lui Hardy-Littlewood-Polya-Karamata

Gheorghe Boroica

Abstract. In this article are presented some applications of the title inequality.

Scopul acestei note este de a pune în evidenţă câteva probleme, care se pot rezolva utilizând inegalitatea din titlu şi de a sensibiliza cititorii privind oportunitatea utilizării acesteia.

P1. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a < b$ şi $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie convexă. Atunci pentru orice numere $a \leq x \leq y \leq z \leq t \leq b$ cu $x + t = y + z$, avem inegalitatea:

$$f(x) + f(t) \geq f(y) + f(z).$$

Demonstraţie. Cum $y, z \in [x, t]$, deducem că există $\alpha, \beta \in [0, 1]$ astfel încât $y = (1 - \alpha)x + \alpha t$ şi $z = (1 - \beta)x + \beta t$. Relaţia $x + t = y + z$ devine:

$$(2 - \alpha - \beta)x + (\alpha + \beta)t = x + t \Leftrightarrow (1 - \alpha - \beta)(x - t) = 0.$$

Dacă $t = x$, atunci $x = y = z = t$ şi inegalitatea este evidentă.

Dacă $t \neq x$, atunci $\alpha + \beta = 1$ şi din f convexă, rezultă că

$$f(y) = f((1 - \alpha)x + \alpha t) \leq (1 - \alpha)f(x) + \alpha f(t)$$

şi $f(z) \leq (1 - \beta)f(x) + \beta f(t)$, de unde, prin adunare, obţinem:

$$f(y) + f(z) \leq f(x) + f(t).$$

Definiţie. Fie n-uplele de numere reale $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ şi $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ astfel încât $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n$, $y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_n$, unde $n \in \mathbb{N}^*$. Spunem că $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \succ (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ dacă $x_1 \geq y_1$,

$$x_1 + x_2 \geq y_1 + y_2, \ldots, x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} \geq y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1}$$

şi

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = y_1 + y_2 + \cdots + y_n.$$

Observaţie. Dacă $x \leq y \leq z \leq t$, $x + t = y + z$, atunci $(t, x) \succ (z, y)$.

P2. (Inegalitatea lui Hardy-Littlewood-Polya-Karamata) Fie I un interval de numere reale, $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie convexă şi două n-uple de numere reale astfel încât $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \succ (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, unde $n \geq 2$. Atunci avem că

$$f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) \geq f(y_1) + f(y_2) + \cdots + f(y_n).$$

Dacă f este strict convexă, atunci avem egalitate în inegalitatea anterioară dacă şi numai dacă $x_i = y_i$, $\forall\, i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Demonstraţie. Inducţie după n (vezi [1], pag. 66). Să mai observăm că proprietatea **P1** este un caz particular al inegalităţii anterioare.

Prezentăm în continuare câteva aplicaţii ale proprietăţilor de mai sus.

1. *Să se arate că dacă $a, b \in [0, \infty)$, atunci avem inegalitatea*

$$\sqrt[3]{a+\sqrt[3]{a}}+\sqrt[3]{b+\sqrt[3]{b}} \le \sqrt[3]{b+\sqrt[3]{a}}+\sqrt[3]{a+\sqrt[3]{b}}.$$

Soluţie. Fără a restrânge generalitatea, putem presupune că $a \ge b \ge 0$. Considerăm numerele: $x_1 = a + \sqrt[3]{a}$, $x_2 = b + \sqrt[3]{a}$, $x_3 = a + \sqrt[3]{b}$, $x_4 = b + \sqrt[3]{b}$. Atunci, x_1 este cel mai mare, x_4 este cel mai mic şi $x_1 + x_4 = x_2 + x_3$. Deoarece $(x_1, x_4) \succ (x_2, x_3)$ sau $(x_1, x_4) \succ (x_3, x_2)$ şi funcţia $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$ este concavă, cu inegalitatea H.L.P.K (proprietatea **P1**) găsim că

$$f(x_1) + f(x_4) \le f(x_2) + f(x_3).$$

2. *Să se afle maximul expresiei $E(a, b, c) = a^{12} + b^{12} + c^{12}$ ştiind că $a, b, c \in [-1, 1]$ şi $a + b + c = -\dfrac{1}{2}$.*

(*Olimpiadă, China, 1997*)

Soluţie. Funcţia $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{12}$ este convexă. Putem presupune că $1 \ge a \ge b \ge c \ge -1$, $a+b+c = -\dfrac{1}{2}$. Atunci avem că $\left(1, -\dfrac{1}{2}, -1\right) \succ (a, b, c)$ şi din inegalitatea H.L.P.K avem

$$f(1) + f\left(-\frac{1}{2}\right) + f(-1) \ge f(a) + f(b) + f(c),$$

deci $E(a, b, c) \le 2 + \dfrac{1}{2^{12}} = E_{\max}$.

3. *Să se arate că în orice triunghi ascuţitunghic avem*

$$1 \le \cos A + \cos B + \cos C \le \frac{3}{2}.$$

Soluţie. Putem presupune că $A \ge B \ge C$, deci $A \ge \dfrac{\pi}{3}$, $C \le \dfrac{\pi}{3}$. Atunci avem că $\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}, 0\right) \succ (A, B, C) \succ \left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}\right)$. Deoarece funcţia $f(x) = \cos x$ este concavă pe $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, găsim că

$$1 = f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f(0) \leq f(A) + f(B) + f(C) \leq \frac{3}{2}.$$

4. *Să se arate că dacă $k, n \in \mathbb{N}^*$, $k \leq n$, atunci avem inegalitatea*

$$C_{2n+1}^{k-1} + C_{2n+1}^{k+1} \geq 2\frac{n+1}{n+2}\, C_{2n+1}^{k}\,.$$

(*Olimpiadă, Germania, 1995*)

Soluţie. Datorită simetriei este suficient să demonstrăm inegalitatea pentru $k \leq n$. Inegalitatea se scrie

$$\frac{k}{2n+2-k} + \frac{2n+1-k}{k+1} \geq \frac{2(n+1)}{n+2}\,. \tag{1}$$

Funcţia $f : [1, 2n+1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{2n+2-x}$, este convexă pe $[1, 2n+1]$. Utilizând **P1** cu $k \leq n$, deducem că

$$f(k) + f(2n+1-k) \geq f(n) + f(n+1) = \frac{2(n+1)}{n+2}\,,$$

adică are loc inegalitatea (1).

5. *Se consideră numerele $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n > 0$, $S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, unde n este număr natural nenul şi f o funcţie convexă definită pe un interval ce conţine numerele S şi $S - (n-1)a_1$. Atunci avem că*

$$\sum_{i=1}^{n} f(S - (n-1)a_i) \geq \sum_{i=1}^{n} f(a_i).$$

Soluţie. Deoarece

$$(S - (n-1)a_n,\ S - (n-1)a_{n-1}, \ldots, S - (n-1)a_1) \succ (a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

şi $f(x) = x^m$, $m \in \mathbb{N}$, $m > 2$ este convexă, utilizând inegalitatea Karamata rezultă concluzia problemei.

Probleme propuse

1. *Să se decidă care din următoarele numere este mai mare $a = \sqrt[2]{7} + \sqrt[7]{7}$; $b = \sqrt[3]{7} + \sqrt[6]{7}$.*

2. *Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Comparaţi numerele*

$$a = \frac{\sqrt[n]{3} + \sqrt[n]{5} + \sqrt[n]{7}}{\sqrt[n]{4} + \sqrt[n]{5} + \sqrt[n]{6}}\,;\ b = \frac{\sqrt[n]{6} + \sqrt[n]{7} + \sqrt[n]{8}}{\sqrt[n]{5} + \sqrt[n]{7} + \sqrt[n]{9}}.$$

(*Concursul "Gh. Dumitrescu", Craiova, 2002*)

3. *Să se arate că dacă $a, b \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, atunci avem*

$$\frac{\sin^n a + \sin^n b}{(\sin a + \sin b)} \geq \frac{\sin^n 2a + \sin^n 2b}{(\sin 2a + \sin 2b)^n}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

(*O. N., Iaşi, 2006, Iurie Boreico*)

4. *Să se arate că*

$$\left(\frac{k}{2n+2-k}\right)^2 + \left(\frac{2n+1-k}{k+1}\right)^2 \geq 1 + \frac{n^2}{(n+2)^2},$$

pentru $\forall\, k, n \in \mathbb{N}^*$, $k \leq n$.

(*Gheorghe Boroica*)

5. *Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval iar $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie convexă. Atunci*

$$f(x)+f(y)+f(z)+3f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) \geq 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) + 2f\left(\frac{y+z}{2}\right) + 2f\left(\frac{z+x}{2}\right).$$

(Inegalitatea lui Popoviciu)

Bibliografie.

1. D. Buşneag, *Complemente de algebră*, Ed. GIL.
2. D. Hardy, J. E. Littlewood and G. Polya, *Inequalities*, Cambridge Mathematical Library, 1952.
3. M. Mureşan, *Mathematics for Competitions*, Nicosia, 2006.

Argument 12

Câteva consideraţii asupra şirului lui Euler

Cristian Heuberger

Abstract. The purpose of this paper is to prove that certain sequences converge rapidly, using methods which are similar to the proof of the convergence of Euler's sequence En.

Este binecunoscut faptul că şirul lui Euler $(E_n)_{n\geq 0}$, $E_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$ este convergent la e.

Pentru $p \in \mathbb{N}^*$ vom considera şirul $(E_{p,n})_{n\geq 0}$, $E_{p,n} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{p!} + \frac{1}{(2p)!} + \cdots + \frac{1}{(np)!}$.

Propoziţie. *Oricare ar fi* $p \in \mathbb{N}^*$, *şirul* $(E_{p,n})_{n\geq 0}$ *este convergent.*

Demonstraţie. Evident şirul este strict crescător şi deoarece $E_{p,n} \leq E_{p\cdot n}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, şirul este mărginit superior de e.

Vom nota în continuare cu L_p limita sa.

Propoziţie. *Pentru orice* $p \in \mathbb{N}^*$, *are loc* $L_p = \frac{1}{p}\sum\limits_{m=0}^{p-1} e^{\cos\frac{2m\pi}{p}} \cos\left(\sin\frac{2m\pi}{p}\right)$.

Demonstraţie. Evident $L_1 = e$, egalitatea din propoziţie verificându-se imediat. Dacă $p \geq 2$, atunci pentru fiecare număr natural $m \leq p-1$ considerăm şirul $(x_{m,n})_{n\geq 1}$, $x_{m,n} = \left(1 + \varepsilon_m \frac{1}{p\cdot n}\right)^{p\cdot n}$ unde $\varepsilon_m = \cos\frac{2m\pi}{p} + i\sin\frac{2m\pi}{p}$ este una dintre rădăcinile de ordinul p ale unităţii. Dezvoltând obţinem:

$$\begin{aligned} x_{0,n} &= 1 + \varepsilon_0 \cdot C^1_{p\cdot n}\frac{1}{p\cdot n} + \varepsilon_0^2 \cdot C^2_{p\cdot n}\frac{1}{(p\cdot n)^2} + \varepsilon_0^3 \cdot C^3_{p\cdot n}\frac{1}{(p\cdot n)^3} + \ldots \\ &\quad + \varepsilon_0^{p\cdot n} \cdot C^{p\cdot n}_{p\cdot n}\frac{1}{(p\cdot n)^{p\cdot n}} \\ x_{1,n} &= 1 + \varepsilon_1 \cdot C^1_{p\cdot n}\frac{1}{p\cdot n} + \varepsilon_1^2 \cdot C^2_{p\cdot n}\frac{1}{(p\cdot n)^2} + \varepsilon_1^3 \cdot C^3_{p\cdot n}\frac{1}{(p\cdot n)^3} + \ldots \\ &\quad + \varepsilon_1^{p\cdot n} \cdot C^{p\cdot n}_{p\cdot n}\frac{1}{(p\cdot n)^{p\cdot n}} \\ \ldots &\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

$$x_{p-1,n} = 1 + \varepsilon_{p-1} \cdot C^1_{p\cdot n}\frac{1}{p\cdot n} + \varepsilon^2_{p-1} \cdot C^2_{p\cdot n}\frac{1}{(p\cdot n)^2} + \varepsilon^3_{p-1} \cdot C^3_{p\cdot n}\frac{1}{(p\cdot n)^3} + \dots$$
$$+ \varepsilon^{p\cdot n}_{p-1} \cdot C^{p\cdot n}_{p\cdot n}\frac{1}{(p\cdot n)^{p\cdot n}}$$

Sumând aceste egalităţi şi ţinând seama că

$$\varepsilon_0^k + \varepsilon_1^k + \varepsilon_2^k + \dots + \varepsilon_{p-1}^k = \begin{cases} p, & \text{pentru } p\,|k \\ 0, & \text{pentru } p \nmid k \end{cases}$$

obţinem

$$x_{0,n} + x_{1,n} + \dots + x_{p-1,n} = p + p \cdot C^p_{p\cdot n} \cdot \frac{1}{(p\cdot n)^p} + p \cdot C^{2\cdot p}_{p\cdot n} \cdot \frac{1}{(p\cdot n)^{2\cdot p}} + \dots$$
$$+ p \cdot C^{n\cdot p}_{p\cdot n}\frac{1}{(p\cdot n)^{n\cdot p}},$$

sau altfel scris

$$\sum_{m=0}^{p-1} x_{m,n} = p\sum_{k=0}^{n} C^{k\cdot p}_{p\cdot n}\frac{1}{(p\cdot n)^{k\cdot p}}. \tag{1}$$

$$x_{m,n} = \left(1 + \frac{1}{p\cdot n}\cos\frac{2m\pi}{p} + i\frac{1}{p\cdot n}\sin\frac{2m\pi}{p}\right)^{p\cdot n} = (r_m(\cos\alpha_m + i\cdot\sin\alpha_m))^{p\cdot n}$$
$$= r_m^{p\cdot n}(\cos pn\alpha_m + i\cdot\sin pn\alpha_m),$$

unde

$$r_m = \sqrt{\left(1+\frac{1}{p\cdot n}\cos\frac{2m\pi}{p}\right)^2 + \left(\frac{1}{p\cdot n}\sin\frac{2m\pi}{p}\right)^2} = \sqrt{1+\frac{1}{(p\cdot n)^2}+\frac{2}{p\cdot n}\cos\frac{2m\pi}{p}},$$

iar

$$\alpha_m = \operatorname{arctg}\frac{\frac{1}{p\cdot n}\sin\frac{2m\pi}{p}}{1+\frac{1}{p\cdot n}\cos\frac{2m\pi}{p}} + k\pi = \operatorname{arctg}\frac{\sin\frac{2m\pi}{p}}{p\cdot n+\cos\frac{2m\pi}{p}} + k\pi,$$

unde $k \in \{0, 2\}$.

Din relaţia (1) deducem că membrul stâng este număr real, rezultând:

$$\sum_{m=0}^{p-1} x_{m,n} = \sum_{m=0}^{p-1} r_m^{p\cdot n}(\cos pn\alpha_m + i\sin pn\alpha_m) = \sum_{m=0}^{p-1} r_m^{p\cdot n}\cos pn\alpha_m$$

$$= \sum_{m=0}^{p-1}\left(1+\frac{1}{(p\cdot n)^2}+\frac{2}{p\cdot n}\cos\frac{2m\pi}{p}\right)^{\frac{p\cdot n}{2}}\cos\left(pn\operatorname{arctg}\frac{\sin\dfrac{2m\pi}{p}}{pn+\cos\dfrac{2m\pi}{p}}\right).$$

Obţinem $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{m=0}^{p-1} x_{m,n} =$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{m=0}^{p-1}\left(1+\frac{1}{(p\cdot n)^2}+\frac{2}{p\cdot n}\cos\frac{2m\pi}{p}\right)^{\frac{p\cdot n}{2}}\cos\left(pn\operatorname{arctg}\frac{\sin\dfrac{2m\pi}{p}}{pn+\cos\dfrac{2m\pi}{p}}\right)$$

$$= \sum_{m=0}^{p-1} e^{\cos\frac{2m\pi}{p}}\cos\left(\sin\frac{2m\pi}{p}\right) \overset{\text{not}}{=} \lambda.$$

De asemenea, pentru orice $k\in\mathbb{N}^*$, $k\le p$,

$$C_{p\cdot n}^{k\cdot p}\frac{1}{(p\cdot n)^{k\cdot p}} = \frac{(p\cdot n)!}{(k\cdot p)!(p\cdot n-k\cdot p)!}\cdot\frac{1}{(p\cdot n)^{k\cdot p}}$$

$$= \frac{1}{(k\cdot p)!}\cdot\frac{(p\cdot n-k\cdot p+1)(p\cdot n-k\cdot p+2)\cdot\ldots\cdot(p\cdot n)}{(p\cdot n)^{k\cdot p}}$$

$$= \frac{1}{(k\cdot p)!}\left(1-\frac{k\cdot p-1}{p\cdot n}\right)\left(1-\frac{k\cdot p-2}{p\cdot n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{0}{p\cdot n}\right). \tag{2}$$

Rezultă că pentru orice $k\in\mathbb{N}^*$, $k\le p$, are loc $C_{p\cdot n}^{k\cdot p}\dfrac{1}{(p\cdot n)^{k\cdot p}} \le \dfrac{1}{(k\cdot p)!}$ (inegalitatea este de altfel verificată şi pentru $k=0$) şi de aici, ţinând seama de relaţia (1)

$$\sum_{m=0}^{p-1} x_{m,n} = p\sum_{k=0}^{n} C_{p\cdot n}^{k\cdot p}\frac{1}{(p\cdot n)^{k\cdot p}} \le p\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k\cdot p)!} = p\cdot E_{p,n}.$$

Trecând la limită cu $n\to\infty$, obţinem

$$\lambda \le p\cdot L_p. \tag{3}$$

Considerăm $q \in \mathbb{N}^*$. Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq q$, are loc

$$\sum_{k=0}^{n} C_{p\cdot n}^{k\cdot p} \frac{1}{(p\cdot n)^{k\cdot p}} \geq \sum_{k=0}^{q} C_{p\cdot n}^{k\cdot p} \frac{1}{(p\cdot n)^{k\cdot p}}$$

$$\overset{(2)}{=} 1 + \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{(k\cdot p)!}\left(1 - \frac{k\cdot p - 1}{p\cdot n}\right)\left(1 - \frac{k\cdot p-2}{p\cdot n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{0}{p\cdot n}\right).$$

Având în vedere (1), obţinem

$$\sum_{m=0}^{p-1} x_{m,n} \geq p\left(1+\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{(k\cdot p)!}\left(1-\frac{k\cdot p-1}{p\cdot n}\right)\left(1-\frac{k\cdot p-2}{p\cdot n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{0}{p\cdot n}\right)\right)$$

şi trecând la limită cu $n \to \infty$ obţinem $\lambda \geq p \cdot E_{p,q}$.
Cum q a fost arbitrar, trecând la limită cu $q \to \infty$, obţinem

$$\lambda \geq p \cdot L_p. \tag{4}$$

Din relaţiile (3) şi (4) se deduce rezultatul cerut.

Observaţia 1. Rezultatul se poate obţine cu mai puţine calcule dacă se operează în mulţimea numerelor complexe, dacă se foloseşte identitatea $e^{i\cdot x} = \cos x + i \sin x$ şi dacă se admite că pentru orice $z \in \mathbb{C}$,

$$e^z = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{1!}z + \frac{1}{2!}z^2 + \cdots + \frac{1}{n!}z^n\right).$$

Observaţia 2. Pentru cazurile particulare în care p este $2, 3$ sau 4 se obţin următoarele rezultate:

$$L_2 = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{0!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}+\cdots+\frac{1}{(2n)!}\right) = \frac{1}{2}\left(e+\frac{1}{e}\right)$$

$$L_3 = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{0!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{6!}+\cdots+\frac{1}{(3n)!}\right) = \frac{1}{3}\left(e+2e^{-\frac{1}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$L_4 = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{0!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{8!}+\cdots+\frac{1}{(4n)!}\right) = \frac{1}{4}\left(e+\frac{1}{e}+2\cos 1\right).$$

De asemenea, calculând $2L_4 - L_2$, se obţine limita cunoscută

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{0!}-\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{6!}+\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}\right) = \cos 1.$$

Propoziţie. *Şirul $(L_p)_{p\geq 1}$ este convergent.*

Demonstraţie. Evident

$$\lim_{p\to\infty} L_p = \lim_{p\to\infty}\left(\frac{1}{p}\sum_{m=0}^{p-1} e^{\cos\frac{2m\pi}{p}}\cos\left(\sin\frac{2m\pi}{p}\right)\right) = \int_0^1 e^{\cos 2\pi t}\cos(\sin 2\pi t)dt$$

şi deci şirul $(L_p)_{p\geq 1}$ este convergent.

Observaţia 1. Evident, $\lim\limits_{p\to\infty} L_p = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{\cos t}\cos(\sin t)dt$.

Observaţia 2. Având în vedere că

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos t}\sin(\sin t)dt = \int_0^{2\pi} e^{\cos(2\pi - t)}\sin(\sin(2\pi - t)dt = -\int_0^{2\pi} e^{\cos t}\sin(\sin t)dt,$$

rezultă $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{\cos t}\sin(\sin t)dt = 0$. Putem scrie aşadar

$$\lim_{p\to\infty} L_p = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{\cos t}(\cos(\sin t) + i\sin(\sin t))dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{\cos t + i\sin t}dt.$$

Observaţia 3. Se poate demonstra că pentru orice număr real x şi pentru orice număr natural nenul p, şirul $(E_{p,n}(x))_{n\geq 0}$, $E_{p,n}(x) = 1 + \dfrac{1}{p!}x^p + \dfrac{1}{(2p)!}x^{2p} + \dots + \dfrac{1}{(np)!}x^{np}$ este convergent la $L_p(x) = \dfrac{1}{p}\displaystyle\sum_{m=0}^{p-1} e^{x\cos\frac{2m\pi}{p}}\cos\left(x\sin\dfrac{2m\pi}{p}\right)$. De asemenea, pentru orice număr real x, şirul $(L_p(x))_{p\geq 1}$ este convergent, având loc egalităţile

$$\lim_{p\to\infty} L_p(x) = \int_0^1 e^{x\cos 2\pi t}\cos(x\sin 2\pi t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{x\cos t}\cos(x\sin t)dt$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{x(\cos t + i\sin t)}dt.$$

Profesor, Colegiul Naţional "Gheorghe Şincai", Baia Mare

Asupra unei probleme de concurs

Nicolae Muşuroia

Abstract. This article will generalize a problem proposed for the Olympiad.

La Olimpiada Judeţeană de Matematică din anul 1978 la clasa a XI-a, d-nul M. Dădârlat a propus următoarea problemă:

Dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *iar* $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *are toate elementele egale, atunci*:

$$\det(A+X) \cdot \det(A-X) \leq \det^2(A).$$

În această notă vom da o generalizare la această elegantă problemă.

Fie $n \in \mathbb{N}^*$, $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Lema 1. *Dacă* $x \in \mathbb{C}$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, *atunci*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{i1+x} & a_{i2+x} & \ldots & a_{in+x} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \det(A) + x \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij},$$

unde δ_{ij} sunt complemenţii algebrici ai elementelor de pe linia "i" din matricea A.

Demonstraţie. Evident

$$F(x) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{i1+x} & a_{i2+x} & \ldots & a_{in+x} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \overset{\text{forma}}{=} ax + b.$$

Atunci $b = F(0) = \det(A)$

$$a = F'(x) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \overset{\text{linia } i}{=} \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij}.$$

Lema 2. *Dacă* $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_1 & \dots & x_1 \\ x_2 & x_2 & \dots & x_2 \\ \vdots & & & \\ x_n & x_n & \dots & x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, *atunci*

$$\det(A+X) = \det A + x_1 \sum_{j=1}^{n} \delta_{1j} + x_2 \sum_{j=1}^{n} \delta_{2j} + \dots + x_n \sum_{j=1}^{n} \delta_{nj}.$$

Demonstraţie. Notăm $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \det(A+X)$. Atunci

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) \overset{\text{forma}}{=} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n + \alpha_0,$$

unde $\alpha_0 = F(0, 0, \dots, 0) = \det(A)$, iar pentru $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ avem

$$\alpha_i = F'_{x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} a_{11}+x_1 & a_{12}+x_1 & \dots & a_{1n}+x_1 \\ a_{21}+x_2 & a_{22}+x_2 & \dots & a_{2n}+x_2 \\ \vdots & & & \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & & \\ a_{n1}+x_1 & a_{n2}+x_2 & \dots & a_{nn}+x_n \end{vmatrix}.$$

Descompunem succesiv în suma a doi determinanţi, dintre care unul nul pe liniile $1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots n$:

$$\alpha_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21}+x_2 & a_{22}+x_2 & \dots & a_{2n}+x_2 \\ \vdots & & & \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & & \\ a_{n1}+x_n & a_{n2}+x_n & \dots & a_{nn}+x_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & x_1 & \dots & x_1 \\ a_{21}+x_2 & a_{22}+x_2 & \dots & a_{2n}+x_2 \\ \vdots & & & \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & & \\ a_{n1}+x_n & a_{n2}+x_n & \dots & a_{nn}+x_n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21}+x_2 & a_{22}+x_2 & \dots & a_{2n}+x_2 \\ \vdots & & & \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & & \\ a_{n1}+x_n & a_{n2}+x_n & \dots & a_{nn}+x_n \end{vmatrix} = \dots = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & & \\ x_n & x_n & \dots & x_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij}.$$

Consecinţă. Dacă $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(C)$ iar $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, are toate elementele egale cu $x \in \mathbb{C}$, atunci

$$\det(A + X) = \det(A) + x \sum_{i,j=1}^{n} \delta_{ij}.$$

[1], problema 2.63, pag. 54

Propoziţie. Dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_1 \\ x_2 & x_2 & \dots & x_2 \\ \vdots & & & \\ x_n & x_n & \dots & x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

atunci:

$$\det(A + X) \cdot \det(A - X) \leq \det{}^2(A).$$

Demonstraţie. Din Lema 2,

$$\det(A + X) = \det(A) + \alpha$$
$$\det(A - X) = \det(A) - \alpha,$$

unde

$$\alpha = x_1 \sum_{j=1}^{n} \delta_{1j} + x_2 \sum_{j=1}^{n} \delta_{2j} + \dots + x_n \sum_{j=1}^{n} \delta_{nj}.$$

Atunci

$$\begin{aligned}\det(A+X)\cdot\det(A-X) &= (\det(A)+\alpha)(\det(A)-\alpha)\\ &= \det^2(A)-\alpha^2 \le \det^2(A).\end{aligned}$$

În cazul particular $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = x$, se obţine problema d-lui M. Dădârlat.

Bibliografie.

1. I. Corovei, V. Pop, *Probleme de algebră*, U. T. Cluj-Napoca, 1995.
2. A. Lupaş, *Asupra unui determinant*, Revista matematică a elevilor din Timişoara, XVI, no. 2, pag. 10-13, 1985.
3. A. Lupaş, L. Lupaş, *Probleme de algebră*, editura GIL, Zalău.
4. V. Pop, *Algebră liniară, matrice şi determinanţi, pentru elevi, studenţi şi concursuri*, Ed. Mediamira, Cluj, 2007.

Profesor, Colegiul Naţional "Gheorghe Şincai", Baia Mare

Tabăra de matematica, Baia Mare, februarie 2009

Gheorghe Maiorescu

Tabăra de matematică organizată în vacanţa intersemestrială la Colegiul Naţional "Gheorghe Şincai" a reunit, la a unsprezecea ediţie consecutivă, peste 500 de elevi din Baia Mare, din oraşele şi comunele din judeţ.

Cursurile au fost susţinute de către următorii profesori:

Pentru gimnaziu: *Boroica Gabriela, Novosivschei Oniţa, Sabău Ştefan, Bob Robert, Lucuş Teodor* – Colegiul Naţional "Vasile Lucaciu", *Maiorescu Elisabeta, Moanţă Anamaria, Bretan Andrei* – Şcoala "Nicolae Iorga", *Sabou Vasile, Pop Romul* – Şcoala "Lucian Blaga", *Buzilă Cristian, Ienuţaş Vasile* – Şcoala "George Coşbuc", *Bârsan Irina, Rotaru Dumitru* – Şcoala "Avram Iancu", *Pop Sever* – Şcoala "Vasile Alecsandri", *Zlampareţ Mihaela* – Şcoala "Ion Luca Caragiale", *Rus Ancuţa* – Şcoala Nr. 1 Baia Sprie, *Huminiuc Monica* – Şcoala Săsar, *Grad Ileana* – Şcoala Săcel, *Pop Cosmin* – Şcoala nr. 10, *Caltea Amalia, Naghi Anamaria* – Şcoala nr. 5, *Tomşa Magdalena* – Şcoala Dumbrăviţa, *Lopată Angela* – Şcoala Ardusat, *Munteanu Mariana, Ştiru Aurica* – Şcoala "Nichita Stănescu", *Băieş Aurel* – Şcoala "Alexandru Ioan Cuza", *Neaga Nadina, Schweighoffer Clara* – Şcoala "Dr. Victor Babeş".

Pentru liceu: *Boroica Gabriela, Covaciu Traian, Darolţi Erika, Sfara Gheorghe* – Colegiul Naţional "Vasile Lucaciu", *Şerba Lucia* – Colegiul Tehnic "Anghel Saligny", *Bojor Meda* – Grup şcolar "Aurel Vlaicu", *Borcut Marin* – Grup şcolar Cavnic, *Bunu Iulian* – Liceul de Artă, *Longaver Ludovic* – Liceul Teoretic "Németh Laszlo, *Podină Camelia, Maiorescu Gheorghe* – Liceul teoretic "Emil Racoviţă", *Bojor Florin, Boroica Gheorghe, Fărcaş Natalia, Heuberger Cristian, Heuberger Dana, Mureşan Ioan, Muşuroia Nicolae, Petruţiu Crina, Zlampareţ Horia* – Colegiul Naţional "Gheorghe Şincai", *Râmbu Gheorghe* – matematician, *Vlad Vasile* – matematician.

Prezentăm în continuare subiectele testului final şi lista premianţilor taberei de la liceu.

Clasa a IX-a

1. a) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $6 \cdot [x] - 5 \cdot x = 3$.
b) Să se determine numărul de soluţii reale ale ecuaţiei

$$(n+1) \cdot [x] - n \cdot x = 3, \text{ unde } n \in \mathbb{N}^* \text{ este fixat.}$$

2. a) Să se arate că dacă $x, y \in \mathbb{R}_+$ şi $n \in \mathbb{N}^*$, atunci

$$(x-y)(x^n - y^n) \geq 0.$$

b) Să se arate că dacă $a, b, c \in (0, \infty)$, atunci avem:

$$\frac{a}{b^4 + c^4 + b \cdot c \cdot a^2} + \frac{b}{c^4 + a^4 + c \cdot a \cdot b^2} + \frac{c}{a^4 + b^4 + a \cdot b \cdot c^2} \leq \frac{1}{a \cdot b \cdot c}.$$

(*Argument,* 9/2007)

3. În triunghiul ABC, $[AM]$ este mediană, $[AA'$ este bisectoarea unghiului BAC cu $M, A' \in (BC)$ şi S este simetricul lui M faţă de punctul A'. Să se arate că $\overline{AS} = \frac{3b-c}{2(b+c)} \cdot \overline{AB} + \frac{3c-b}{2(b+c)} \cdot \overline{AC}$.

Test selectat de: prof. Boroica Gheorghe
prof. Muşuroia Nicolae
prof. Covaciu Traian

Clasa a X-a

1. a) Să se demonstreze că:

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b)(b+c)(c+a), \ a, b, c \in \mathbb{R}.$$

b) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia: $\sqrt[3]{2x-3} + \sqrt[3]{x^2-2x-1} + \sqrt[3]{-x^2+3} = -1$.

c) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ sistemul: $\begin{cases} 1 + x + \sqrt{x-1} + \sqrt[3]{x-2} = y \\ 1 + y + \sqrt{y-1} + \sqrt[3]{y-2} = z \\ 1 + z + \sqrt{z-1} + \sqrt[3]{z-2} = x \end{cases}$

(*prof. Petruţiu Crina*)

2. Fie patrulaterul convex $ABCD$ şi mijloacele M şi N ale laturilor (AB), respectiv (CD). Să se arate că centrele de greutate ale triunghiurilor ADN, BNC, CMB şi DAM sunt vârfurile unui paralelogram.

(*prof. Longaver Ludovic*)

3. Se consideră triunghiul echilateral ABC înscris în cercul $C(O,1)$.
a) Să se arate că $PA^2 + PB^2 + PC^2 = 6$, $\forall\, P \in C(O,1)$.
b) Să se arate că $\dfrac{1}{|z-z_A|^2} + \dfrac{1}{|z-z_B|^2} + \dfrac{1}{|z-z_C|^2} \geq \dfrac{3}{2}$, $\forall\, z \in \mathbb{C}$, $|z| = 1$, unde z_A, z_B, z_C sunt afixele vârfurilor triunghiului ABC.

(*prof. Zlampareţ Horia*)

Test selectat de: prof. Petruţiu Crina
prof. Zlampareţ Horia

Clasa a XI-a

1. Dacă matricele $A, B, C \in \mathcal{M}_3(C)$ comută două câte două şi $A+B+C = -I_3$, demonstraţi că:

$$\det[A^3 + B^3 + C^3 - 3(A+I_3)(B+I_3)(C+I_3)] < 0.$$

(*prof. Muşuroia Nicolae*)

2. Fie şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_n = \sqrt{\dfrac{n^3+1}{n}}$, $\forall\, n \geq 1$.
a) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n)$.
b) Să se demonstreze că şirul $(y_n)_{n\geq 1}$, definit prin $y_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{x_k^2}$, este convergent şi limita sa este un număr din intervalul $\left(\dfrac{13}{18}, \dfrac{3}{2}\right)$.

(*prof. Bojor Florin*)

3. Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 1}$, unde $a_1 > 0$ şi $a_{n+1} = a_n + \dfrac{c}{a_n}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, unde $c > 0$ este dat. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{n^\alpha}$, unde $\alpha \in \mathbb{R}$.

(*prof. Boroica Gheorghe*)

Test selectat de: prof. Bojor Florin
prof. Fărcaş Natalia

Clasa a XII-a

1. Se consideră şirul de integrale $(I_n)_{n\geq 1}$, $I_n = n\int_0^1 \dfrac{x^n}{x^n+1}dx$.
a) Să se calculeze I_1 şi I_2;
b) Să se demonstreze că $\ln(1+x) \leq x$, $\forall\, x > -1$;
c) Să se arate că $I_n = \ln 2 - \displaystyle\int_0^1 \ln(1+x^n)dx$;
d) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$;
e) Pentru $m \in \mathbb{N}^*$, să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \ln((e+x^n)(e^2+x^n)\cdot\ldots\cdot(e^m+x^n))dx.$$

2. Pentru $n \in \mathbb{Z}$ considerăm matricele $A(n) = \begin{pmatrix} \widehat{3}^n & \widehat{3}^n \\ \widehat{3}^n & \widehat{3}^n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_5)$ şi mulţimea $G = \{A(n) | n \in \mathbb{Z}\}$.
a) Determinaţi ordinul elementului $\widehat{3}$ în grupurile $(\mathbb{Z}_5, +)$, respectiv $(\mathbb{Z}_5^*, \cdot)$;
b) Determinaţi numărul elementelor mulţimii G;
c) Demonstraţi că $\forall\, n, p \in \mathbb{Z}$ are loc egalitatea $A(n)\cdot A(p) = -A(n+p+1)$.

3. Fie $H = \{I_n, A_1, A_2\}$ un subgrup al grupului multiplicativ al matricelor inversabile din $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Notăm $A = I_n + A_1 + A_2$.
a) Demonstraţi că H este grup comutativ;
b) Calculaţi $A_1 \cdot A_2$;
c) Demonstraţi că $A_1 \cdot A = A$;
d) Demonstraţi că $\det(A) \in \{0, 3^n\}$.

Test selectat de: prof. Longaver Ludovic
prof. Heuberger Cristian

Premianţii

Clasa a IX-a

Excelenţă. *Petrovan Marius* (C. N. "Gh. Şincai").

Premiul I. *Kando Enikö, Pop Andrei, Tîrnovan Andrada* (C. N. "Gh. Şincai").

Premiul al II-lea. *Lupan Andreea, Rusznak Erik, Chiş Diana, Mihalca Daniel* (C. N. "Gh. Şincai"), *Miholca Diana* (C. N. "Vasile Lucaciu").

Premiul al III-lea. *Romocea Roxana, Vancea Paula, Balko Andreea, Fînăţan Vlad, Mariş Claudiu, Iriciuc Iosif, Pop Denisa, Urda Rodica* (C. N. "Gh. Şincai").

Clasa a X-a

Excelenţă. *Horvat Mihaela* (C. N. "Gh. Şincai").

Premiul I. *Micu Alexandru*(C. N. "Gh. Şincai").

Premiul al II-lea. *Fărcăşan Roxana, Ionuţaş Bogdan, Puşcaş Karla* (C. N. "Gh. Şincai").

Premiul al III-lea. *Buhăţel Caius, Marian Alexandru, Ştefan Andrei, Talpoş Liviu* (C. N. "Gh. Şincai").

Clasa a XI-a

Excelenţă. *Tot Roxana* (C. N. "Gh. Şincai")

Premiul I. *Modis Laszlo* (Lic. Teoretic "Néméth Laszlo"), *Munteanu Theodor* (C. N. "Dragoş Vodă").

Premiul al II-lea. *Bunu Daria, Pop Iulia* (C. N. "Gh. Şincai").

Premiul al III-lea. *Pop Ioana, Ilniţchi Oana, Lang Oana* (C. N. "Gh. Şincai").

Clasa a XII-a

Excelenţă. *Rohnean Alin* (C. N. "Gh. Şincai").

Premiul I. *Mesaroş Ionuţ, Lup Alexandru, Ciurdaş Alina* (C. N. "Gh. Şincai")

Premiul al II-lea. *Achim Alexandru, Mesaroş Aurelian, Paşcalău Paul, Griguţă Victoria, Fülop Patric, Mureşan Caius, Neamţ Sergiu* (C. N. "Gh. Şincai").

Premiul al III-lea. *Bobb Laura, Daniluk Sergiu, Crişan Alexandra* (C. N. "V. Lucaciu"), *Pop Bogdan, Vezentan Vlad, Temle Vasile, Drincal Brigitta, Şerban Ioana, Zamfira Alexandru* (C. N. "Gh. Şincai"), *Dan-Om Alexandra, Dragoş Valer* (Lic. Teoretic "Emil Racoviţă").

Inspector I. S. J. Maramureş

Tabăra de vară de matematică - Vaser, 2009

Gheorghe Maiorescu

În perioada 01–06 septembrie 2009 s-a desfăşurat pe Valea Vaserului - Vişeu, tabăra de matematică de vară. Această tabără s-a desfăşurat sub egida Soţietăţii de Ştiinţe Matematice din România, filiala Maramureş şi a Inspectoratului Şcolar Judeţean Maramureş. Această ediţie s-a desfăşurat cu aportul deosebit al domnului inspector de matematică, profesor Gheorghe Maiorescu, şi a domnului director al Liceului Teoretic "Bogdan Vodă" Vişeu, profesor Dumitru Andreica, precum şi cu aportul important al unor sponsori locali cărora le mulţumim.

Au participat efectiv un număr de 15 elevi şi 7 profesori.

Profesorii participanţi au fost:

Boroica Gabriela (C. N. "V. Lucaciu" Baia Mare)
Boroica Gheorghe (C. N. "Gh. Şincai" Baia Mare) – coordonatorul taberei
Bretan Andrei (Şc. "N. Iorga" Baia Mare)
Gherasin Gheorghe (Lic. "Regele Ferdinand" Sighetu Marmaţiei)
Heuberger Cristian (C. N. "Gh. Şincai" Baia Mare)
Ienuţaş Vasile (Şc. "G. Coşbuc" Baia Mare)
Muşuroia Nicolae (C. N. "Gh. Şincai" Baia Mare)

În urma concursului desfăşurat în data de 6 spetembrie 2009, elevii participanţi au obţinut următoarele premii:

Clasa a VII-a: Bud Cristian, Şc. "N. Iorga" Baia Mare, premiul I
Miclea Andrei, Şc. "N. Iorga" Baia Mare, premiul II
Breban Oana, Şc. "N. Iorga" Baia Mare, premiul III
Vele Corina, Şc. "L. Blaga" Baia Mare, premiul III

Clasa a VIII-a: Bretan Paula Alice, Şc. "N. Iorga" Baia Mare, premiul I

Clasa a IX-a: Conţi Andrada, C. N. "Gh. Şincai" Baia Mare, premiul I
Puicar Bogdan, C. N. "Dragoş Vodă" Sighetu Marmaţiei, premiul II

Clasa a X-a: Petrovan Marius, C. N. "Gh. Şincai" Baia Mare, premiul I
Rusznak Erik, C. N. "Gh. Şincai" Baia Mare, premiul II
Todoran Denisa, C. N. "Gh. Şincai", premiul III

Clasa a XI-a: Crişan Vlad, C. N. "V. Lucaciu" Baia Mare, premiul I
Horvat Mihaela, C. N. "Gh. Şincai" Baia Mare, premiul II

Clasa a XII-a: Munteanu Theodor, C. N. "Dragoş Vodă" Sighetu Marmaţiei, premiul I
Toth Roxana, C. N. "Gh. Şincai" Baia Mare, premiul I
Bunu Daria, C. N. "Gh. Şincai" Baia Mare, premiul II

Clasa a VII – VIII-a

1. Fie a, b, c, d, e, f numere naturale astfel încât

$$1 < a < b < c < d < e < f \quad \text{şi} \quad a + b + c + d + e + f = 48.$$

Demonstraţi că cel puţin unul dintre numere este prim.

2. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} |(x+1)(y+1)| = 2 \\ |(y+1)(z+1)| = 3 \\ |(z+1)(x+1)| = 6 \end{cases}, \quad \text{unde } x, y, \in \mathbb{R}.$$

3. Să se arate că într-un patrulater convex $ABCD$ avem:

$$AC \cdot BD \leq AB \cdot CD + AD \cdot BC \quad \text{(inegalitatea lui Ptolemeu).}$$

În ce caz avem egalitate?

Clasa a IX-a

1. Aranjăm numerele naturale în următorul tabel:

1	3	6	10	15	...
2	5	9	14	...	
4	8	13	...		
7	12	...			
11	...				

Să se determine linia şi coloana pe care este scris numărul 2009.

2. Să se rezolve în numere naturale nenule ecuaţia:

$$3(xy + xz + yz) = 4xyz.$$

3. Să se arate că în orice triunghi are loc inegalitatea:

$$h_a + h_b + h_c \geq 9r.$$

În ce caz are loc egalitatea?

Argument 12

Clasa a X-a

1. Determinaţi toate numerele prime p pentru care numărul $2^p + p^2$ este de asemenea număr prim.

2. Să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, ecuaţia $x^2 + y^2 + z^2 = 5^n$ are soluţii în mulţimea numerelor naturale nenule.

3. Fie M un punct în interiorul triunghiului echilateral ABC cu proprietatea că

$$MA^2 + MB \cdot MC = MB^2 + MC^2.$$

Să se arate că $m(\widehat{BAC}) = 120°$.

Clasa a XI-a

1. Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_1 \in [0,1]$, $a_{n+1} = a_n^3 - a_n^2 + 1$, $\forall\, n \geq 1$.
a) Să se demonstreze că $a_n \in [0,1]$, $\forall\, n \geq 1$;
b) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} (a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n)$.

2. a) Să se calculeze A^n, $n \in \mathbb{N}^*$, unde $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$;
b) Să se rezolve în $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ ecuaţia matriceală $X^3 - 2X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 10 & 4 \end{pmatrix}$.

3. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir definit astfel: $a_1 = a$; $a_2 = b$; $a_{n+2} = \dfrac{a_{n+1} + a_n}{2}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ $(a, b \in \mathbb{R})$.
Să se demonstreze că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent şi calculaţi limita sa.

Clasa a XII-a

1. a) Să se demonstreze că $e^x \geq x + 1$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.
b) Să se demonstreze inegalităţile:
i) $\displaystyle\int_0^1 e^{x^2} dx \geq \frac{4}{3}$;
ii) $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2} dx \leq \frac{\pi}{4}$.

2. Fie $p \in \mathbb{N}$ un număr prim, $p \geq 3$. Să se calculeze

$$(1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + (p-2)(p-1) \pmod{p}).$$

3. a) Să se calculeze $\int \frac{x^2}{e^x} dx$.

b) Să se determine funcţiile primitivabile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu $f(0) = 0$ şi $f(x) - F(x) = x^2$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, unde F este o primitivă a lui f.

Inspector şcolar I.S.J. Maramureş

Olimpiada de matematică, etapa locală, 14.02.2009

Clasa a IX-a

1. a) Să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ are loc egalitatea:

$$1+2\cdot(1+2)+3\cdot(1+2+3)+\dots+n\cdot(1+2+3+\dots+n) = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(3n^2+7n+2)}{24};$$

b) Demonstraţi că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(3n+1) \vdots 24$.

2. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ considerăm suma $S_n = \sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\dots+\sqrt{n}$.
a) Calculaţi partea întreagă a numerelor S_1, S_2, S_3, S_4;
b) Să se arate că $[S_n] = n \Leftrightarrow n \in \{1,2\}$;
c) Să se rezolve ecuaţia $[x + S_{2009-x}] = 2009$, $x \in \mathbb{N}$.

3. Pe laturile $[AB]$ şi $[AC]$ ale triunghiului ABC se consideră punctele D şi respectiv E, astfel încât $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{0}$. Dacă T este punctul de intersecţie al dreptelor DC şi BE, să se determine $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât $\overrightarrow{TB}+\overrightarrow{TC} = \alpha\cdot\overrightarrow{TA}$.

Subiectele au fost selectate de: prof. Petruţiu Crina
prof. Boroica Gabriela
prof. Tomoiagă Ioan
prof. Heuberger Cristian

Clasa a X-a

1. Să se determine numerele complexe z_1, z_2, z_3 care au acelaşi modul cu proprietatea că $z_1+z_2+z_3 = z_1\cdot z_2\cdot z_3 = 1$.

(*G. M.* 12/2008)

2. Să se arate că:

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\dots+\sqrt{2}}}+\sqrt{6+\sqrt{6+\dots+\sqrt{6}}}+\dots$$
$$+\sqrt{n^2-n+\sqrt{n^2-n+\dots+\sqrt{n^2-n}}} < \frac{n^2+n-2}{2},$$

pentru orice număr natural $n \geq 2$, unde fiecare termen din sumă conţine p radicali, $p \in \mathbb{N}^*$ fixat.

(*Teodor Lucuş*)

3. a) Dacă $x, y, a, b > 0$, să se demonstreze că $\dfrac{x^2}{a} + \dfrac{y^2}{b} \geq \dfrac{(x+y)^2}{a+b}$.

b) Dacă $a, b, c > 1$ sau $a, b, c \in (0,1)$, să se demonstreze că:

$$\frac{1}{\log_a bc \cdot \log_a abc} + \frac{1}{\log_b ac \cdot \log_b abc} + \frac{1}{\log_c ab \cdot \log_c abc} \geq \frac{1}{2}.$$

(*Meda şi Florin Bojor*)

Subiectele au fost selectate de: prof. Gherasin Gheorghe
prof. Lucuş Teodor
prof. Muşuroia Nicolae
prof. Bojor Florin

Clasa a XI-a

1. Se consideră $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Să se determine $\sigma \in S_n$, astfel încât pentru orice $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, avem $\sum\limits_{k=1}^{i} \dfrac{\sigma(k)}{(\sigma(k+1))!} = 1 - \dfrac{1}{(i+1)!}$.

(*Dana Heuberger*)

2. Se consideră $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Dacă $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, astfel încât $A \cdot B = B \cdot A$, să se arate că $\det(A^2 + B^2) \geq 0$.

b) Dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, astfel încât $A^3 + 2A - I = O_n$, să se arate că $\det(A) > 0$.

(*Gheorghe Sfara*)

3. Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit astfel: $a_1 = 1$ şi $\dfrac{n}{a_{n+1}} - \dfrac{n+1}{a_n} = n(n+1)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se determine termenul general al şirului $(a_n)_{n\geq 1}$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^3} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\ln(1+a_k)}$.

(*G. M.* $7-8/2008$)

Subiectele au fost selectate de: prof. Darolţi Erika
prof. Sfara Gheorghe
prof. Heuberger Dana

Clasa a XII-a

1. Se consideră mulţimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R},\ a^2 + b^2 \neq 0 \right\}$.

a) Să se arate că mulţimea G este grup abelian în raport cu operaţia de înmulţire a matricelor.

b) Să se arate că grupurile $(G, \cdot)$ şi $\mathbb{C}^*)$ sunt izomorfe.

c) Să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, grupul G conţine un subgrup H cu n elemente.

2. a) Să se calculeze integrala $\displaystyle\int \frac{2x+3}{x \cdot (x+1) \cdot (x+2) \cdot (x+3) + a} dx$, $x > 0$, unde $a > 0$.

b) Să se determine funcţiile $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$, cu proprietatea că $g : (0, \infty) \to (0, \infty)$, $g(x) = \dfrac{f(x)}{x+1}$ este o primitivă a funcţiei f.

3. Fie $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă cu derivata continuă şi care îndeplineşte următoarele condiţii:

a) $x \cdot f'(x) \geq f(x)$, $\forall\, x \in [0, 1]$;

b) $\displaystyle\lim_{x \searrow 0} \frac{f(x)}{x}$ există şi este finită.

Să se arate că $f(1) \geq \min \left(2 \displaystyle\int_0^1 f(x) dx,\ \int_0^1 \frac{f(x)}{x} dx \right)$.

($G.\ M.$ 7 – 8/2008)

Subiectele au fost selectate de: prof. Boroica Gheorghe
prof. Podină Camelia
prof. Pintea Ioan

Concursurile anului şcolar 2008-2009
Rezultate la Olimpiada judeţeană de matematică

Clasa a IX-a

Premiul I. *Petrovan Marius, Rusznak Erik* (prof. Heuberger Dana), *Todoran Denisa* (prof. Heuberger Cristian)

Premiul al II-lea. *Bretan Beatrice* (prof. Muşuroia Nicolae), *Chiş Diana, Lupan Andreea, Kando Enikö* (prof. Bojor Florin)

Premiul al III-lea. *Bancoş Andrei, Mihalca Daniel* (prof. Muşuroia Nicolae), *Fînăţan Vlad, Ungur Corina* (prof. Heuberger Dana), *Jaszberenyi Andreea* (prof. Bojor Florin), *Pop Andrei* (prof. Heuberger Cristian)

Clasa a X-a

Premiul I. *Horvat Mihaela* (prof. Fărcaş Natalia), *Gheţie Mariana* (prof. Bojor Florin)

Premiul al II-lea. *Ciobanu Andrei, Marian Alexandru, Radu Andrada* (prof. Bojor Florin), *Bujor Daniel* (prof. Heuberger Cristian)
Premiul al III-lea. *Ferenţ Ioan* (prof. Boroica Gheorghe), *Puşcaş Karla* (prof. Bojor Florin), *Enescu Alexandru* (prof. Muşuroia Nicolae)

Clasa a XI-a

Premiul I. *Bunu Daria* (prof. Boroica Gheorghe)

Premiul al II-lea. *Tot Roxana* (prof. Boroica Gheorghe), *Lang Oana* (prof. Heuberger Cristian)

Premiul al III-lea. *Negrea Cristian* (prof. Boroica Gheorghe), *Barta Ştefan* (prof. Muşuroia Nicolae)

Clasa a XII-a

Premiul I. *Rohnean Alin, Mesaroş Ionuţ* (prof. Heuberger Dana)

Premiul al III-lea. *Magdău Ionuţ* (prof. Heuberger Dana)

Calificaţi la Faza Naţională a Olimpiadei de matematică

Petrovan Marius (prof. Heuberger Dana), *Horvat Mihaela* (prof. Fărcaş Natalia), *Rohnean Alin, Mesaroş Ionuţ* (prof. Heuberger Dana)

Premii la Faza Naţională a Olimpiadei de matematică

Horvat Mihaela, medalie de argint SSMR (prof. Fărcaş Natalia), *Rohnean Alin*, medalie de bronz SSMR (prof. Heuberger Dana)

Rezultate la Faza Judeţeană a Concursului Adolf Haimovici

Clasa a IX-a

Premiul I. *Potîrniche Mihai* (prof. Bojor Florin)

Clasa a XI-a

Premiul al II-lea. *Dancoş Lavinia* (prof. Petruţiu Crina)

Clasa a XII-a

Premiul al II-lea. *Groza Roland* (prof. Heuberger Cristian)

Calificaţi la Faza Naţională a Concursului Adolf Haimovici

Potîrniche Mihai (prof. Bojor Florin)

Concursuri interjudeţene

Clasa a IX-a

Petrovan Marius (prof. Heuberger Dana)
– menţiune specială la concursul "Gheorghe Lazăr", Sibiu
– premiul al II-lea la concursul "Grigore Moisil", Satu Mare
– premiul I la concursul "Marian Ţarină", Turda
– menţiune la concursul "Unirea", Focşani

Kando Enikö (prof. Bojor Florin)
– menţiune specială la concursul "Gheorghe Lazăr", Sibiu

Todoran Denisa (prof. Heuberger Cristian)
– menţiune la concursul "Grigore Moisil", Satu Mare
– menţiune la concursul "Marian Ţarină", Turda

Rusznak Erik (prof. Heuberger Dana)

– menţiune la concursul ”Grigore Moisil”, Satu Mare

Clasa a X-a

Horvat Mihaela (prof. Fărcaş Natalia)
– menţiune la concursul ”Gheorghe Lazăr”, Sibiu
– menţiune la concursul ”Grigore Moisil”, Satu Mare
– menţiune specială la concursul ”Al. Papiu Ilarian”, Târgu Mureş
– menţiune specială la concursul ”Unirea”, Focşani

Radu Andrada (prof. Bojor Florin)
– menţiune specială la concursul ”Gheorghe Lazăr”, Sibiu

Clasa a XI-a

Bunu Daria (prof. Boroica Gheorghe)
– menţiune specială la concursul ”Gheorghe Lazăr”, Sibiu
– menţiune la concursul ”Grigore Moisil”, Satu Mare
– menţiune la concursul ”Marian Ţarină”, Turda

Tot Roxana (prof. Boroica Gheorghe)
– menţiune specială la concursul ”Gheorghe Lazăr”, Sibiu
– menţiune specială la concursul ”Al. Papiu Ilarian”, Târgu Mureş
– menţiune la concursul ”Unirea”, Focşani

Negrea Cristian (prof. Boroica Gheorghe)
– menţiune specială la concursul ”Al. Papiu Ilarian”, Târgu Mureş

Clasa a XII-a

Mesaroş Ionuţ (prof. Heuberger Dana)
– premiul al II-lea la concursul ”Gheorghe Lazăr”, Sibiu
– premiul al II-lea la concursul ”Al. Papiu Ilarian”, Târgu Mureş
– menţiune la concursul ”Marian Ţarină”, Turda
– premiul I la concursul ”Unirea”, Focşani

Rohnean Alin (prof. Heuberger Dana)
– menţiune la concursul ”Grigore Moisil”, Satu Mare
– premiul al III-lea la concursul ”Al. Papiu Ilarian”, Târgu Mureş
– premiul al III-lea la concursul ”Marian Ţarină”, Turda
– menţiune la concursul ”Unirea”, Focşani

Rezolvarea problemelor din numărul anterior

Clasa a IX-a

1. *Fie $a, b, c > 0$. Să se demonstreze că:*

$$\frac{1}{a+\sqrt{bc}}+\frac{1}{b+\sqrt{ac}}+\frac{1}{c+\sqrt{ab}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

(*Meda şi Florin Bojor*)

Soluţie. Se ştie că $\dfrac{1}{x+y} \le \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)$, $\forall\, x, y > 0$. Obţinem:

$$\frac{1}{a+\sqrt{bc}}+\frac{1}{b+\sqrt{ac}}+\frac{1}{c+\sqrt{ab}} \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ac}}+\frac{1}{\sqrt{ab}}\right).$$

Din inegalitatea mediilor avem: $\sqrt{\dfrac{1}{bc}} \le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)$ şi analoagele. Înlocuind, obţinem relaţia cerută, cu egalitate dacă şi numai dacă $a = b = c$.

2. *Fie $k > 0$ şi $x, y, z \in (0, k)$ astfel încât $x+y+z = 2k$. Să se demonstreze că* $\dfrac{x}{k-x}\cdot\dfrac{y}{k-y}\cdot\dfrac{z}{k-z} \ge 8$.

(*Meda şi Florin Bojor*)

Soluţie. Trebuie demonstrat că $xyz \ge 8(y+z-k)(z+x-k)(x+y-k)$. Notăm $y+x-k = a$, $z+x-k = b$, $x+y-k = c$. Atunci $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ şi $x = b+c$, $y = a+c$, $z = a+b$. Obţinem inegalitatea $(b+c)(c+a)(a+b) \ge 8abc$ care este evidentă după aplicarea inegalităţii mediilor.

3. *Să se determine toate mulţimile finite A de numere întregi, cu proprietatea că $3^x - x^3 \in A$, $\forall\, x \in A$.*

(*Gheorghe Boroica*)

Soluţie. Dacă $x \in A$, $x < 0$, atunci $3^x - x^3 \notin \mathbb{Z}$, deci $3^x - x^3 \notin A$. Prin urmare A nu conţine numere întregi strict negative. Fie $x \in A$, $x \ge 0$. Dacă $\max A = m$, atunci $3^m - m^3 \le m$. Prin inducţie se arată că $3^n > n^3 + n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $n > 4$. Atunci $m \in \{0, 1, 2, 3\}$. Analizând toate cazurile posibile, obţinem pentru mulţimea A următoarele posibilităţi:

$$\{0, 1, 2\},\ \{1, 2\},\ \{0, 1, 2, 3\}.$$

4. *Să se arate că pentru orice* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, *ecuaţia* $x^2 + y^2 + z^2 = 5^n$ *are soluţii în mulţimea numerelor naturale nenule.*

(*Gheorghe Boroica*)

Soluţie. Pentru $n = 3$, tripletul $(3, 4, 10)$ este soluţie, iar pentru $n = 4$, tripletul $(20, 12, 9)$ este soluţie. Presupunând că tripletul $(x_n, y_n, z_n) \in \mathbb{N}^{*3}$ este soluţie şi luând $(x_{n+2}, y_{n+2}, z_{n+2}) = (5x_n, 5y_n, 5z_n)$, avem că

$$x_{n+2}^2 + y_{n+2}^2 + z_{n+2}^2 = 25(x_n^2 + y_n^2 + z_n^2) = 5^{n+2},$$

adică ecuaţia are soluţie în $\mathbb{N}^*$ şi pentru $n + 2$. Conform inducţiei matematice cu pasul 2, ecuaţia dată are soluţie pentru $\forall\, n \geq 3$.

5. *Spunem că o mulţime* $A \subset \mathbb{N}^*$ *este* perfectă *dacă suma elementelor sale este egală cu pătratul numărului său de elemente.*

a) Să se determine toate mulţimile perfecte *cu câte patru elemente.*

b) Să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, *există cel puţin o mulţime* perfectă *cu* n *elemente.*

c) Să se arate că dacă A *este o mulţime* perfectă, *atunci* A *conţine cel puţin un număr impar.*

d) Să se arate că dacă A *şi* B *sunt mulţimi* perfecte *cu acelaşi număr de elemente, atunci* $A \cap B \neq \emptyset$.

(Traian Covaciu, C. N. "Vasile Lucaciu")

Soluţie. *a)* $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ cu $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 4^2$. Avem posibilităţile: $\{1, 2, 3, 10\}$, $\{1, 2, 4, 9\}$, $\{1, 2, 5, 8\}$, $\{1, 2, 6, 7\}$, $\{1, 3, 4, 8\}$, $\{1, 3, 5, 7\}$, $\{1, 4, 5, 6\}$, $\{2, 3, 4, 7\}$, $\{2, 3, 5, 6\}$.

b) $A = \{1, 3, 5, \ldots, 2n - 1\}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Presupunem că există o mulţime perfectă $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ cu toate elementele numere pare. Atunci

$$n^2 = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq 2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n^2 + n.$$

Contradicţie.

d) Fie $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ şi $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ mulţimi perfecte cu n elemente fiecare. Presupunem că $A \cap B = \emptyset$. Atunci

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + b_1 + b_2 + \cdots + b_n = 2n^2 \geq 1 + 2 + \cdots + 2n = 2n^2 + n.$$

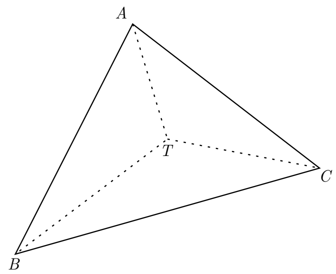
Contradicţie.

6. *Să se arate că* $\forall\, x, y, z \in (0, \infty)$,

$$\frac{x}{\sqrt{y^2 + yz + z^2}} + \frac{y}{\sqrt{z^2 + zx + x^2}} \frac{z}{\sqrt{x^2 + xy + y^2}} \geq \sqrt{3}.$$

(*Marian Dincă*)

Soluţie. Fie T un punct în plan. Considerăm segmentele $TA = x$, $TB = y$, $TC = z$, astfel încât $m(\widehat{ATC}) = m(\widehat{CTB}) = m(\widehat{BTA}) = 120°$.



Punctul T este punctul lui Toricelli al triunghiului ABC. Aplicând teorema cosinusului în triunghiul BTC obţinem $a = \sqrt{y^2 + yz + z^2} = BC$.
Analog: $b = AC = \sqrt{x^2 + xz + z^2}$, $c = AB = \sqrt{x^2 + xy + y^2}$.

Deci trebuie demonstrat că:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \geq \sqrt{3}. \tag{1}$$

Din inegalitatea $(u + v + w)^2 \geq 3(uv + vw + wu)$ pentru $u = \dfrac{x}{a}$, $v = \dfrac{y}{b}$, $w = \dfrac{z}{c}$ obţinem

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \geq \sqrt{3}\sqrt{\frac{x}{a} \cdot \frac{y}{b} + \frac{y}{b} \cdot \frac{z}{c} + \frac{zx}{ca}}. \tag{2}$$

Dar $azy+bxz+cxy \geq abc$ (problema lui M. Chiriţă, M. Lascu, Revista Cardinal nr. 2, RMT).

Împărţind cu abc obţinem: $\dfrac{xy}{ab} + \dfrac{yz}{bc} + \dfrac{zx}{ca} \geq 1$. Din (2) rezultă (1).

7. *Se consideră $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$ şi mulţimea V de n vectori legaţi, cu originea O şi cu modulul 1, astfel încât oricum am alege 4 vectori din V, suma a doi dintre aceştia se află în V.*

a) Pentru $n = 7$, să se dea un exemplu de mulţime V cu proprietatea din enunţ.

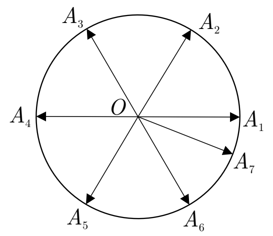
b) Să se demonstreze că $n \leq 7$.

c) Dacă $n = 6$, să se demonstreze că extremităţile vectorilor sunt vârfurile unui hexagon regulat.

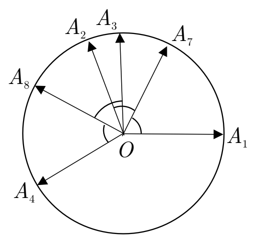
(*Dana Heuberger*)

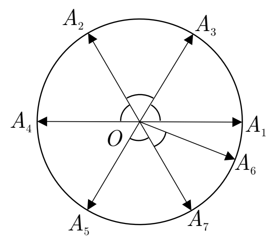
Soluţie. Pentru $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, notăm $\overrightarrow{v}_i = \overrightarrow{OA_i}$ cu $A_i \in \mathcal{C}(O, 1)$.

a) Alegem $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ vârfurile unui hexagon regulat şi $A_7 \in \mathcal{C}(O, 1)$ oarecare. Orice combinaţie de trei vectori dintre $\overrightarrow{v}_1$, $\overrightarrow{v}_2$, $\overrightarrow{v}_3$, $\overrightarrow{v}_4$, $\overrightarrow{v}_5$, $\overrightarrow{v}_6$ are doi vectori cu suma în mulţimea V, de unde rezultă concluzia.



b) Alegem 4 vector şi dintre ei $\overrightarrow{v}_1$, $\overrightarrow{v}_2$ cu $\overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{v}_2 \in V$, deci cu $m(\widehat{A_1OA_2}) = 120°$. Presupunem că $n \geq 8$. Alegem 4 vectori diferiţi de $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2$ şi dintre ei, $\overrightarrow{v}_3, \overrightarrow{v}_4$ cu $\overrightarrow{v}_3 + \overrightarrow{v}_4 \in V$, deci cu $m(\widehat{A_3OA_4}) = 120°$.





Găsim, analog, $\overrightarrow{v}_5, \overrightarrow{v}_6 \in V \backslash \{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3, \overrightarrow{v}_4\}$, cu $\overrightarrow{v}_5 + \overrightarrow{v}_6 \in V$ şi cu $m(\widehat{A_5OA_6}) = 120°$. Rezultă că cel puţin două dintre unghiurile $\widehat{A_1OA_2}$, $\widehat{A_3OA_4}$ şi $\widehat{A_5OA_6}$ au interioarele nedisjuncte. De exemplu, $Int(\widehat{A_1OA_2}) \cap Int(\widehat{A_3OA_4}) \neq \emptyset$.

Cazul I. Dacă $\begin{cases} \overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{v}_2 = \overrightarrow{v}_7 \\ \overrightarrow{v}_3 + \overrightarrow{v}_4 = \overrightarrow{v}_8 \end{cases}$, cu $\overrightarrow{v}_7, \overrightarrow{v}_8 \in V \backslash \{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3, \overrightarrow{v}_4\}$, vectorii $\overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3, \overrightarrow{v}_7, \overrightarrow{v}_8$ nu verifică ipoteza, contradicţie.

Cazul II. Dacă $\begin{cases} \overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{v}_2 = \overrightarrow{v}_3 \\ \overrightarrow{v}_3 + \overrightarrow{v}_4 = \overrightarrow{v}_2 \end{cases}$.

(Cazul $\overrightarrow{v}_3 + \overrightarrow{v}_4 = \overrightarrow{v}_1$ se tratează la fel).

Dacă $Int(\widehat{A_1OA_2}) \cap Int(\widehat{A_5OA_6}) \neq \emptyset$ sau $Int(\widehat{A_3OA_4}) \cap Int(\widehat{A_5OA_6}) \neq \emptyset$, ca în cazul I, ajungem la o contradicţie.

Dacă $Int(\widehat{A_1OA_2}) \cap Int(\widehat{A_5OA_6}) = \emptyset$ şi $Int(\widehat{A_3OA_4}) \cap Int(\widehat{A_5OA_6}) = \emptyset$, atunci $\overrightarrow{v}_5 + \overrightarrow{v}_6 = \overrightarrow{v}_7$, cu $\overrightarrow{v}_7 \in V \backslash \{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3, \overrightarrow{v}_4, \overrightarrow{v}_5, \overrightarrow{v}_6\}$ şi alegând vectorii $\overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3, \overrightarrow{v}_5, \overrightarrow{v}_7$, obţinem situaţiile:

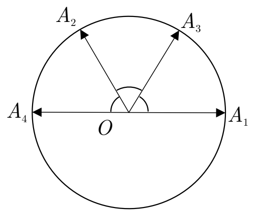
1) $\overrightarrow{v}_2 + \overrightarrow{v}_5 \in V \Rightarrow \overrightarrow{v}_6 = \overrightarrow{v}_1$ sau $\overrightarrow{v}_6 = \overrightarrow{v}_2$, contradicţie.

2) $\overrightarrow{v}_2+\overrightarrow{v}_7 \in V \Rightarrow \overrightarrow{v}_5=\overrightarrow{v}_4$ sau $\overrightarrow{v}_6=\overrightarrow{v}_4$, contradicţie.
3) $\overrightarrow{v}_3+\overrightarrow{v}_5 \in V \Rightarrow \overrightarrow{v}_6=\overrightarrow{v}_4$ sau $\overrightarrow{v}_6=\overrightarrow{v}_3$, contradicţie.
4) $\overrightarrow{v}_3+\overrightarrow{v}_7 \in V \Rightarrow \overrightarrow{v}_5=\overrightarrow{v}_1$ sau $\overrightarrow{v}_6=\overrightarrow{v}_1$, contradicţie.
Aşadar $n \leq 7$.

c) Pentru $n=6$, ca la punctul b), găsim vectorii $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3, \overrightarrow{v}_4 \in V$, cu $\overrightarrow{v}_1+\overrightarrow{v}_2,\ \overrightarrow{v}_3+\overrightarrow{v}_4 \in V$, şi cu $m(\widehat{A_1OA_2})=m(\widehat{A_3OA_4})=120°$.

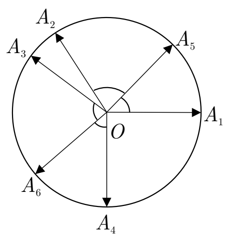
Cazul I. Dacă $Int(\widehat{A_1OA_2}) \cap Int(\widehat{A_3OA_4})=\emptyset$ şi $\begin{cases}\overrightarrow{v}_1+\overrightarrow{v}_2=\overrightarrow{v}_5\\ \overrightarrow{v}_3+\overrightarrow{v}_4=\overrightarrow{v}_6\end{cases}$, cu $\overrightarrow{v}_5, \overrightarrow{v}_6 \in V\backslash\{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3, \overrightarrow{v}_4\}$, vectorii $\overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3, \overrightarrow{v}_5, \overrightarrow{v}_6$ nu verifică ipoteza, contradicţie.

Cazul II. Dacă $Int(\widehat{A_1OA_2}) \cap Int(\widehat{A_3OA_4}) \neq \emptyset$ şi $\begin{cases}\overrightarrow{v}_1+\overrightarrow{v}_2=\overrightarrow{v}_3\\ \overrightarrow{v}_3+\overrightarrow{v}_4=\overrightarrow{v}_2\end{cases}$,



(cazul $\overrightarrow{v}_3+\overrightarrow{v}_4=\overrightarrow{v}_1$ se tratează la fel) alegem vectorii $\overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_4, \overrightarrow{v}_5, \overrightarrow{v}_6$ şi obţinem $\overrightarrow{v}_2+\overrightarrow{v}_5 \in V$, sau $\overrightarrow{v}_2+\overrightarrow{v}_6 \in V$, sau $\overrightarrow{v}_4+\overrightarrow{v}_5 \in V$, sau $\overrightarrow{v}_4+\overrightarrow{v}_6 \in V$, în toate situaţiile obţinând că hexagonul este regulat.

Cazul III. Dacă $Int(\widehat{A_1OA_2}) \cap Int(A_3OA_4)=\emptyset$ şi poligonul nu e hexagon regulat, de exemplu $m(\widehat{A_2OA_3})<60°$, vectorii $\overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3, \overrightarrow{v}_5, \overrightarrow{v}_6$ nu verifică ipoteza.



8. *Să se determine numărul maxim al punctelor M situate în planul paralelogramului $ABCD$, pentru care aria$[ABCD]=MA\cdot MB+MC\cdot MD$.*

(*Ludovic Longaver, Liceul "Németh Laszlo"*)

Soluţie. $MA\cdot MB+MC\cdot MD \geq MA\cdot MB\sin(\widehat{AMB})+MC\cdot MD\sin(\widehat{DMC})=2\,aria[AMB]+2\,aria[CMD]=AB\cdot d_1+CD\cdot d_2=AB(d_1+d_2)=aria[ABCD]$, unde $d_1=d(M,AB)$, $d_2=d(M,CD)$. Egalitatea se obţine în cazul în care $\sin(\widehat{AMB})=\sin(\widehat{DMC})=1$, caz în care punctul M se găseşte la intersecţia semicercurilor de diametre $[AB]$, respectiv $[CD]$. Obţinem cel mult două puncte M care corespund cerinţei problemei date.

9. *Fie* $D = \{x \in \mathbb{N} \,|\, x$ *număr prim*$\}$ *şi funcţia* $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \left\{\dfrac{x^2-1}{24}\right\}$, *unde* $\{x\}$ *reprezintă partea fracţionară a numărului* x. *Să se determine mulţimea valorilor funcţiei* f.

(*Ludovic Longaver, Liceul "Németh Laszlo"*)

Soluţie. Restul împărţirii numărului prim p la 12 nu poate fi $2, 3, 4, 6, 8, 9, 10$. Atunci p este de forma $p = 12q + r$, $q \in \mathbb{N}$, $r \in \{1, 5, 7, 11\}$.
Deci $p^2 = 144q^2 + 24rq + r^2$, $r^2 \in \{1, 25, 49, 121\}$. Rezultă că p^2 este de forma $p^2 = 24k + 1$, $k \in \mathbb{N}^*$. Atunci dacă $x \in D$, $x \geq 5$, avem $\dfrac{x-1}{24} \in \mathbb{N}$ şi $\left\{\dfrac{x^2-1}{24}\right\} = 0$. Cum $f(2) = \dfrac{1}{8}$, $f(3) = \dfrac{1}{3}$, obţinem $Im(f) = \left\{0, \dfrac{1}{8}, \dfrac{1}{3}\right\}$.

10. *Să se arate că dacă* $a, b, c \in \mathbb{R}^*$ *şi* $abc(a^3+b^3+c^3) < a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3$, *atunci exact două dintre ecuaţiile* $ax^2 + bx + c = 0$, $bx^2 + cx + a = 0$ *şi* $cx^2 + ax + b = 0$ *au soluţii reale.*

(*Nicolae Muşuroia*)

Soluţie. $\Delta_1' + \Delta_2' + \Delta_3' = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac \geq 0$, deci cel puţin una dintre ecuaţii are soluţii reale. Presupunem că toate cele trei ecuaţii au soluţii reale. Atunci $\Delta_1' \cdot \Delta_2' \cdot \Delta_3' \geq 0 \Rightarrow (b^2 - ac)(a^2 - bc)(c^2 - ab) \geq 0 \Rightarrow abc(a^3 + b^3 + c^3) \geq a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3$, contradicţie.

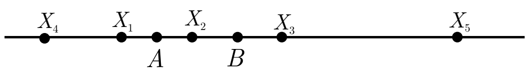
11. *Fie* d *o dreaptă în plan şi* $M \subset d$ *o mulţime nevidă de puncte care admite două puncte de simetrie,* $A, B \in d$.

a) Să se arate că mulţimea M *este infinită.*

b) Să se arate că există o diviziune echidistantă a dreptei d *pentru care fiecare nod este un punct de simetrie pentru mulţimea* M.

(*Vasile Pop, Concursul interjudeţean "Al. Papiu Ilarian", 2008*)

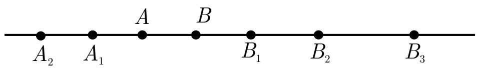
Soluţie. a) Putem considera dreapta d ca o axă a numerelor. Fie $A(a)$, $B(b)$ cu $a < b$.



Cum $M \neq \emptyset$, există $X_1(x_1) \in M$. Fie $X_2(x_2)$ simetricul lui X_1 faţă de A; $X_3(x_3)$ simetricul lui X_2 faţă de B; $X_4(x_4)$ simetricul lui X_3 faţă de A; $X_5(x_5)$

simetricul lui X_4 faţă de B şi aşa mai departe. Cum $x_2+x_1=2a \Rightarrow x_2=2a-x_1$. Analog obţinem numerele $x_3=2b-2a+x_1$, $x_4=4a-2b-x_1$, $x_5=4b-4a+x_1,\dots$. Considerăm şirul de numere reale $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, $x_{2n+1}=2n(b-a)+x_1$, $n\in\mathbb{N}$. Şirul $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ fiind strict crescător, mulţimea $\{x_{2n+1}|n\in\mathbb{N}\}$ este infinită şi prin urmare $\{X_{2n+1}|n\in\mathbb{N}\}\subset M$ este infinită. Deci mulţimea M este infinită.

b) Considerăm $A_1=$ simetricul lui B faţă de A, $A_2=$ simetricul lui A faţă de A_1, $A_3=$ simetricul lui A_1 faţă de $A_2,\dots,A_{i+1}=$ simetricul lui A_{i-1} faţă de $A_i,\dots$.



Analog, $B_1=$ simetricul lui A faţă de B, $B_2=$ simetricul lui B faţă de B_1; $B_3=$ simetricul lui B_1 faţă de B_2 ş. a.m.d. Obţinem o diviziune echidistantă a dreptei d formată cu nodurile A_i, B_i, $i=0,1,\dots,n,\dots$ cu $A_0=A$, $B_0=B$. Arătăm că fiecare nod este punct de simetrie pentru mulţimea M.

A_1 este simetricul lui B faţă de $A\Rightarrow a_1=2a-b$. A_2 este simetricul lui A faţă de $A_1\Rightarrow a_2=3a-2b$. Din aproape în aproape obţinem: $a_n=(n+1)a-nb$, $n\in\mathbb{N}^*$. Din a) avem: $x_{2n}=2na-(2n-2)b, \forall\, n\in\mathbb{N}^*$. Atunci $x_1+x_{2n+2}=2a_n$, $n\in\mathbb{N}^*$, adică X_1 şi X_{2n+2} sunt simetrice faţă de A_n, deci A_n, $n\in\mathbb{N}^*$ este nod de simetrie pentru M. Analog obţinem: $b_n=(n+1)b-na$ şi $x_2+x_{2(n+1)+1}=x_2+(2n+2)(b-a)+x_1=2a-x_1+(2n+2)b-(2n+2)a+x_1=(2n+2)b-2na=2b_n$, deci X_2 şi $X_{2(n+1)+1}$ sunt simetrice faţă de B_n, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$.

Cum A şi B sunt noduri de simetrie pentru M, deducem că toate punctele diviziunii construite sunt noduri de simetrie pentru M.

12. *Se consideră* $n\in\mathbb{N}^*$ *şi numerele* $x_1,x_2,\dots,x_n\in[-1,1]$ *astfel încât* $x_1+x_2+\dots+x_n=0$. *Să se arate că* $x_1^3+x_2^3+\dots+x_n^3\le\dfrac{n}{4}$.

(*Margareta Trif, Colegiul Economic "Nicolae Titulescu"*)

Soluţie. Din $x_i\in[-1,1]$, $i\in\{1,2,\dots,n\}$ rezultă că există $\alpha_i\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ astfel încât $\sin\alpha_i=x_i$. Cum $\sin 3\alpha_i=3\sin\alpha_i-4\sin^3\alpha_i$, rezultă $\sin^3\alpha_i=$

$\frac{1}{4}(3\sin\alpha_i - \sin 3\alpha_i)$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Atunci

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^3 = \frac{1}{4}\left(3\sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} \sin 3\alpha_i\right)$$
$$\stackrel{\text{Ipoteza}}{=} \frac{1}{4}(\sin 3\alpha_1 + \sin 3\alpha_2 + \cdots + \sin 3\alpha_n) \le \frac{n}{4}.$$

13. *Dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n \in (0, \infty)$ şi $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = n$, să se arate că*

$$\frac{1}{1 + a_1a_2} + \frac{1}{1 + a_2a_3} + \cdots + \frac{1}{1 + a_na_1} \ge \frac{n}{2}.$$

(*Mihaela Zlamparet, Generalizarea unei probleme de la OM Belarus, 1999*)

Soluţie. Folosim inegalitatea:

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1} + \frac{x_2^2}{\alpha_2} + \cdots + \frac{x_n^2}{\alpha_n} \ge \frac{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n},$$

unde $x_i \in \mathbb{R}$, $\alpha_i \in (0, \infty)$, $i = \overline{1, n}$. Atunci:

$$\frac{1}{1 + a_1a_2} + \frac{1}{1 + a_2a_3} + \cdots + \frac{1}{1 + a_{n-1}a_n} + \frac{1}{1 + a_na_1}$$
$$\ge \frac{(1 + 1 + \cdots + 1)^2}{n + a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_na_1} \ge \frac{n^2}{n + a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2} = \frac{n^2}{n + n} = \frac{n}{2},$$

cu egalitate pentru $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1$.

14. *Dacă a, b, c, d sunt lungimile laturilor unui patrulater, să se demonstreze că*

$$\frac{a}{b + c + d - a} + \frac{b}{a + c + d - b} + \frac{c}{a + b + d - c} + \frac{d}{a + b + c - d} \ge 2.$$

(*Horia Zlamparet*)

Soluţie. $\frac{a}{b + c + d - a} - \frac{1}{2} = \frac{a - b}{2(b + c + d - a)} + \frac{a - c}{2(b + c + d - a)} + \frac{a - d}{2(b + c + d - a)}$.
analog pentru ceilalţi termeni. Dacă E reprezintă membrul stâng al inegalităţii cerute, atunci

$$E - 2 = \sum\left(\frac{a - b}{2(b + c + d - a)} + \frac{b - a}{2(a + c + d - b)}\right)$$
$$= \sum \frac{2(a - b)^2}{2(b + c + d - a)(a + c + d - v)} \ge 0,$$

deoarece $a < b + c + d$ şi analoagele pentru a, b, c, d laturile unui patrulater.

15. *Dacă* $a_1, a_2, \ldots, a_n \in (0, \infty)$ *şi* $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$, *să se arate că*

$$\frac{a_1^{2009} + a_2^{2009}}{a_1^{2008} + a_2^{2008}} + \frac{a_2^{2009} + a_3^{2009}}{a_2^{2008} + a_3^{2008}} + \cdots + \frac{a_n^{2009} + a_1^{2009}}{a_n^{2008} + a_1^{2008}} \geq \frac{1}{n^{2007}}.$$

Soluţie. Se verifică că $\dfrac{a^{2009} + b^{2009}}{a^{2008} + b^{2008}} \geq \dfrac{a+b}{2}$, $\forall\, a, b > 0$. Dacă E reprezintă membrul stâng al inegalităţii cerute, atunci

$$E \geq \frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_2 + a_3}{2} + \cdots + \frac{a_n + a_1}{2} = \frac{2(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)}{2} = 1 > \frac{1}{n^{2007}}$$

cu egalitate pentru $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = \dfrac{1}{n}$, deci inegalitatea de demonstrat este slabă.

Clasa a X-a

1. *Fie* $a, b, c, d \in \mathbb{N}^*$ *astfel încât* $\log_a b = \dfrac{4}{3}$ *şi* $\log_c d = \dfrac{5}{6}$. *Dacă* $c - a = 37$, *să se calculeze* $b - d$.

(*Meda şi Florin Bojor*)

Soluţie. $\log_a b = \dfrac{4}{3} \Rightarrow b = \sqrt[3]{a^4} \in \mathbb{N}^* \Rightarrow (\exists)\, x \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $a = x^3$.
$\log_c d = \dfrac{5}{6} \Rightarrow d = \sqrt[6]{c^5} \in \mathbb{N}^* \Rightarrow (\exists)\, y \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $c = y^6$.
Din $c - a = 37 \Rightarrow y^6 - x^3 = 37 \Rightarrow (y^2 - x)(y^4 + y^2 x + x^2) = 37$

$$\Rightarrow \begin{cases} y^2 - x = 1 \\ y^4 + y^2 x + x^2 = 37 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2. \end{cases}$$ Obţinem $b - d = 49$.

2. *Să se determine numerele naturale* $n \geq 2$ *pentru care* $\log_n(n+6) \in \mathbb{Q}$.

(*Meda şi Florin Bojor*)

Soluţie. Din $\log_n(n+6) > 1$ şi $\log_n(n+6) \in \mathbb{Q}$ deducem că există $p, q \in \mathbb{N}$, $p > q$, $(p, q) = 1$ astfel încât $\log_n(n+6) = \dfrac{p}{q}$, adică $n + 6 = n^{\frac{p}{q}}$. Rezultă că $n^{\frac{1}{q}} \in \mathbb{N}$. Notând $n^{\frac{1}{q}} = a$, obţinem: $n = a^q$ şi $n + 6 = a^p$, deci $a^p - a^q = 6 \Leftrightarrow a^q(a^{p-q} - 1) = 6$. Rezultă că $a|6$, deci $a \in \{1, 2, 3, 6\}$.
Se observă că $a = 1$ nu convine.

Pentru $a = 2$ rezultă $q = 1$ şi $p = 3$, deci $n = 2$.

Pentru $a = 3$ rezultă $q = 1$ şi $p = 2$, deci $n = 3$.

Pentru $a = 6$ rezultă $q = 1$ şi $6^{p-1} = 2$, deci imposibil în $\mathbb{N}$. Obţinem $n \in \{2, 3\}$.

3. *Se consideră numerele naturale m, n, p cu $m, n, p \geq 2$, având proprietatea că*

$$\sqrt[m]{3^n} + \sqrt[n]{3^p} + \sqrt[p]{3^m} = 9.$$

Să se demonstreze că $m = n = p$. Generalizare.

(*Gheorghe Boroica*)

Soluţie. Din inegalitatea mediilor rezultă:

$$3 = \frac{\sqrt[m]{3^n} + \sqrt[n]{3^p} + \sqrt[p]{3^m}}{3} \geq \sqrt[3]{\sqrt[m]{3^n} \cdot \sqrt[n]{3^p} \cdot \sqrt[p]{3^m}}$$
$$= \sqrt[3]{3^{\frac{n}{m}+\frac{p}{n}+\frac{m}{p}}} = 3^{\frac{n^2p+mp^2+m^2n}{3mnp}} \geq 3^{\frac{3\sqrt[3]{n^2p\cdot mp^2\cdot m^2n}}{3mnp}} = 3.$$

Cum are loc egalitate în inegalitatea mediilor, vom avea $\sqrt[m]{3^n} = \sqrt[n]{3^p} = \sqrt[p]{3^m}$ şi $n^2p = m^2n = mp^2$. Rezultă $m = n = p$.

Generalizare. Dacă $m \in \mathbb{N}^*$ şi $n_1, n_2, \ldots, n_m \in \mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$ şi

$$\sqrt[n_1]{m^{n_2}} + \sqrt[n_2]{m^{n_3}} + \cdots + \sqrt[n_{m-1}]{m^{n_m}} + \sqrt[n_m]{m^{n_1}} = n^2,$$

atunci demonstraţi că $n_1 = n_2 = \cdots = n_m$.

4. *Să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, avem:*

$$\sqrt[n]{(n!)^3} < \frac{(n+1)^2(n+2)}{12}.$$

(*Gheorghe Boroica*)

Soluţie. Din inegalitatea mediilor rezultă:

$$\sqrt[n]{(n!)^3} = \sqrt[n]{(1\cdot n^2)(2(n-1)^2)\ldots n\cdot 1^2} < \frac{1\cdot n^2 + 2(n-1)^2 + \cdots + n\cdot 1^2}{n}$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)(n-k)^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\Big((k+1)n^2 - 2n(k^2+k) + (k^3+k^2)\Big)$$
$$= \frac{1}{n}\left[n^2\frac{n(n+1)}{2} - 2n\left(\frac{n(n-1)(2n-1)}{6} + \frac{n(n-1)}{2}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{n^2(n-1)^2}{4} + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}\right] = \frac{1}{12}(n+1)^2(n+2).$$

5. *Să se rezolve ecuaţia* $\dfrac{3^x}{2+2\cdot 3^x}+\dfrac{2^x}{2+2^{x+1}}+\dfrac{2^x}{2^x+3^x+2}=1$, *pentru* $x\geq 0$.

(*Vasile Giurgi, C. N. "Dragoş Vodă", Sighetu Marmaţiei*)

Soluţie. Ecuaţia dată se scrie echivalent:

$$\frac{3^x}{1+3^x}+\frac{2^x}{1+2^x}=\frac{2(2^x+3^x)}{2^x+3^x+2}.$$

Considerăm funcţia $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$. Deoarece $\dfrac{x}{1+x}=1-\dfrac{1}{x+1}$, rezultă că funcţia f este concavă pe $[0,\infty)$.

Din inegalitatea lui Jensen $f\left(\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)\geq\dfrac{f(y_1)+f(y_2)}{2}$, pentru $y_1=2^x$ şi $y_2=3^x$ rezultă $\dfrac{3^x}{1+3^x}+\dfrac{2^x}{1+2^x}\leq\dfrac{2(2^x+3^x)}{2^x+3^x+2}$ cu egalitate pentru $x=0$.

6. *Se consideră punctele distincte* A,B,C,D,M,N,P,Q *în plan, astfel încât* $ABCD$ *şi* $MNPQ$ *sunt paralelograme, cu* $AB\nparallel MN$, $BC\nparallel NP$ *şi* $AM\nparallel BN$.

a) Să se arate că se poate construi un patrulater $XYZT$ *cu laturile de lungime respectiv* AM, BN, CP, DQ.

b) Să se demonstreze că dacă $XYZT$ *este romb, atunci paralelogramele* $ABCD$ *şi* $MNPQ$ *au acelaşi centru.*

(*Dana şi Cristian Heuberger*)

Soluţie. *a*) Se cunoaşte proprietatea:

P. Fie $x,y,z,t\in(0,\infty)$. Există un patrulater cu laturile de lungimi $x,y,z,t\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x<y+z+t\\ y<z+t+x\\ z<t+x+y\\ t<x+y+z.\end{cases}$$

Fie $a,b,c,d,m,n,p,q\in\mathbb{C}$, respectiv afixele punctelor A,B,C,D,M,N,P,Q.
$ABCD$ este paralelogram $\Rightarrow a+c=b+d$.
$MNPQ$ este paralelogram $\Rightarrow m+p=n+q$.
Scăzând cele două relaţii obţinem:

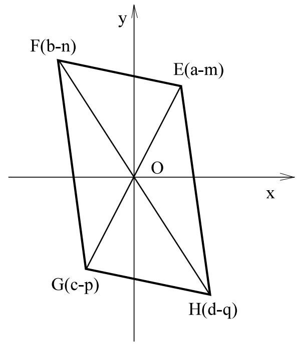
$$a-m+c-p=b-n+d-q, \tag{1}$$

şi apoi $|a-m|=|(p-c)+(b-n)+(d-q)|\leq|p-c|+|b-n|+|d-q|$, deci $AM\leq BN+CP+DQ$. Egalitatea are loc, dacă şi numai dacă există

$\alpha, \beta \in (0, \infty)$, astfel încât $p - c = \alpha(b - n)$ şi $d - q = \beta(b - n)$ caz în care, din (1) deducem $a - m = (1 + \alpha + \beta)(b - n)$. Aşadar vectorii $\overrightarrow{AM}$ şi $\overrightarrow{BN}$ sunt paraleli, fals. În concluzie, avem $AM < BN + CP + DQ$.

Analog se demonstrează că $BN < CP+DQ+AM$, $CP < DQ+AM+BN$ şi $DQ < AM + BN + CP$, de unde rezultă concluzia.

b) Fie punctele $O(0)$, $E(a - m)$, $F(b - n)$, $G(c - p)$ şi $H(d - q)$.



Observăm că $E = G \Leftrightarrow F = H \Leftrightarrow \begin{cases} a - c = m - p \\ b - d = n - q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{MP} \\ \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{NQ} \end{cases}$, de unde rezultă $AB \| MN$, fals. Aşadar $E \neq G$ şi $F \neq H$.

Din $AB \nparallel MN$, $BC \nparallel NP$, mai obţinem $a-m \neq b-n$, $b-n \neq c-p$, $c-p \neq d-q$ şi $d-q \neq a-m$, deci E, F, G, H sunt distincte. Cum $EG = FH$, obţinem că punctele E, F, G, H nu sunt colinare. Deoarece $z_E + z_G = z_F + z_H$, $EFGH$ este paralelogram. Avem $OE = OF = OG = OH$, deci $EFGH$ este înscris în $\mathcal{C}(O, OE)$, aşadar $EFGH$ este dreptunghi. Obţinem că $\begin{cases} a - m = p - c \\ b - n = q - d \end{cases}$, deci $\begin{cases} a + c = m + p \\ b + d = n + q \end{cases}$, aşadar paralelogramele $ABCD$ şi $MNPQ$ au acelaşi centru.

7. *Se consideră* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 6$ *şi* $\varepsilon \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$ *astfel încât* $\varepsilon^n = 1$. *Dacă* $z \in \mathbb{C}$, *astfel încât* $|z - \varepsilon| \leq 2 \sin \dfrac{\pi}{n}$ *şi* $|z - \varepsilon^2| \leq 2 \sin \dfrac{\pi}{n}$, *să se arate că* $2 \cos \dfrac{(n+3)\pi}{3n} \leq |z| \leq 2 \cos \dfrac{(n-3)\pi}{3n}$.

(*Dana şi Cristian Heuberger*)

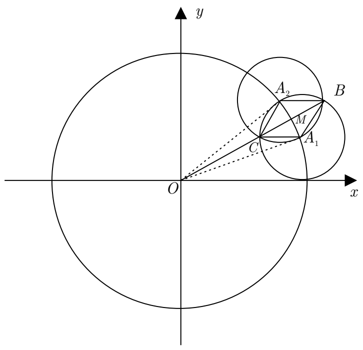
Soluţie. În planul complex, alegem cercul $\mathcal{C}(O,1)$, iar pentru $k\in\{1,2,...,n-1\}\backslash\left\{\dfrac{n}{2}\right\}$, considerăm $\varepsilon_k=\cos\dfrac{2k\pi}{n}+i\sin\dfrac{2k\pi}{n}\in\mathbb{C}\backslash R$, rădăcină de ordinul n a unităţii. Avem $\varepsilon_k^2=\varepsilon_{2k}$. Considerăm de asemenea punctele $A_k(\varepsilon_k)$, $A_{2k}(\varepsilon_{2k})$ şi cercurile $\mathcal{C}(A_k,r)$ şi $C(A_{2k},r)$, unde $r=A_1A_2=2\sin\dfrac{\pi}{n}$. Considerăm un număr $z\in\mathbb{C}$ care verifică ipoteza, pentru $\varepsilon=\varepsilon_k$.

Notăm cu P imaginea sa în planul complex. Dacă $|z-\varepsilon_k|\le r$ şi $|z-\varepsilon_{2k}|\le r$, atunci $P(z)\in\mathcal{D}(A_k,r)\cap\mathcal{D}(A_{2k},r)$. Pentru ca intersecţia să fie nevidă, este necesar ca

$$A_kA_{2k}\le 2r\Leftrightarrow\sin\frac{k\pi}{n}\le 2\sin\frac{\pi}{n}. \tag{1}$$

I. $1\le k<\dfrac{n}{2}$. Relaţia (1) este evident adevărată pentru $k\in\{1,2\}$. Pentru $k=3$ din (1) $\Leftrightarrow\sin\dfrac{\pi}{n}\left(3-4\sin^2\dfrac{\pi}{n}\right)\le 2\sin\dfrac{\pi}{n}\Leftrightarrow\sin^2\dfrac{\pi}{n}\ge\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow n\le 6$.
Folosind ipoteza, deducem că $n=6$, dar în acest caz obţinem $\varepsilon_k=\varepsilon_3=-1$, fals. Pentru $k>3$ obţinem analog că (1) $\Leftrightarrow n<6$, fals. Aşadar $k\in\{1,2\}$.

1) Pentru $k=1$ notăm cu B şi C punctele de intersecţie ale cercurilor $\mathcal{C}(A_1,r)$ şi $\mathcal{C}(A_2,r)$, ca în figura alăturată.

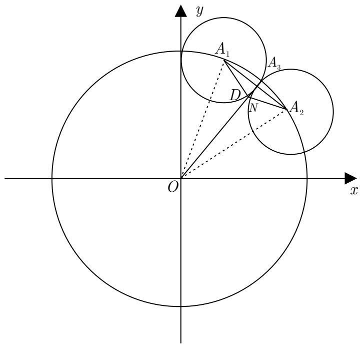


Evident, punctele O,B şi C sunt coliniare şi avem $OC=2\cos\dfrac{(n+3)\pi}{3n}=|z_C|$ şi $OB=2\cos\dfrac{(n-3)\pi}{3n}=|z_B|$. Dacă numărul $z\in\mathbb{C}$ care verifică ipoteza, şi P este imaginea sa în planul complex, atunci $P(z)\in\mathcal{D}(A_1,r)\cap\mathcal{D}(A_2,r)$, deci cel mai mare modul al unei soluţii este $|z_B|$ şi cel mai mic modul al unei soluţii este $|z_C|$, de unde rezultă concluzia.

2) Pentru $k = 2$, punctele de intersecţie ale cercurilor $\mathcal{C}(A_2, r)$ şi $\mathcal{C}(A_4, r)$ aunt A_3 şi D. Punctele O, D şi A_3 sunt coliniare şi avem $OA_3 = 1 = |z_{A_3}|$ şi $OD = 4\cos\dfrac{(n-3)\pi}{3n}\cos\dfrac{(n+3)\pi}{3n} = |z_D|$. dacă numărul $z \in \mathbb{C}$ verifică ipoteza, şi P este imaginea sa în planul complex, atunci $P(z) \in \mathcal{D}(A_2, r) \cap \mathcal{D}(A_4, r)$, şi cel mai mare modul al unei soluţii este 1 şi cel mai mic modul al unei soluţii este $|z_D|$. Avem $OC < OD \Leftrightarrow 2\cos\dfrac{(n+3)\pi}{3n} < 4\cos\dfrac{(n-3)\pi}{3n}\cos\dfrac{(n+3)\pi}{3n} \Leftrightarrow$ $\cos\left(\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{n}\right) > \dfrac{1}{2} = \cos\dfrac{\pi}{3}$, adevărat, deci dacă pentru $k = 2$, numărul $z \in \mathbb{C}$ verifică ipoteza, atunci $OC < OD < |z| < 1 < OB$, adică este adevărată concluzia.

II. Pentru $\dfrac{n}{2} < k < n-1$, avem $1 < n-k < \dfrac{n}{2}$ şi deoarece $\varepsilon_{n-k} = \overline{\varepsilon}_k$, există $z \in \mathbb{C}$ astfel încât pentru ε_k sunt adevărate relaţiile din ipoteză $\Leftrightarrow$ există $z \in \mathbb{C}$ astfel încât pentru ε_{n-k} sunt adevărate relaţiile din ipoteză $\overset{\text{I.}}{\Leftrightarrow}$ $n-k \in \{1, 2\} \Leftrightarrow k \in \{n-1, n-2\}$.

Deoarece pentru $n - k \in \{1, 2\}$ şi ε_{n-k} se obţine concluzia (ca în **I.**), iar figura este simetrică faţă de Ox, rezultă că şi pentru $k \in \{n-1, n-2\}$ şi $z \in \mathbb{C}$ astfel încât pentru ε_k sunt adevărate relaţiile din ipoteză, se deduce concluzia.



8. *Se consideră $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Spunem că funcţia f are proprietatea (P), dacă $f : [a, b) \to [a, b)$ şi $\forall\, x \in [a, b)$, $f(x) \in \{x-1, x+1\}$.*

a) Să se demonstreze că există o funcţie injectivă cu proprietatea (P) dacă şi numai dacă $b - a$ este un număr natural par.

b) Dacă funcţiile $f, g : [a, b) \to [a, b)$ au proprietatea (P) şi funcţia $g \circ f$ este bijectivă, să se demonstreze că $f = g$.

(*Dana Heuberger, Lista scurtă pentru Olimpiada Naţională, 2008*)

Soluţie. Să observăm mai întâi că dacă $b - a < 2$, nu există funcţii cu proprietatea (p), deoarece pentru $x = \dfrac{a+b}{2} \in [a, b)$, avem $x - 1 \notin [a, b)$ şi $x + 1 \notin [a, b)$. Aşadar, pentru ca să existe funcţii ca în enunţ, trebuie ca $b - a \geq 2$.

a) "$\Leftarrow$" Există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $b - a = 2n$. Se arată uşor că funcţia $f_0 : [a, b) \to [a, b)$, $f_0(x) = \begin{cases} x+1, & x \in [a+2k-2, a+2k-1) \\ x-1, & x \in [a+2k-1, a+2k) \end{cases}$, $\forall\, k = \overline{1, n}$ este o soluţie.

"$\Rightarrow$" Presupunem că există o funcţie injectivă f, cu proprietatea (P), pentru $b - a = 2n + r$, cu $n \in \mathbb{N}^*$ şi $r \in (0, 2)$.
Deoarece pentru $x \in [a, a+1)$, avem că $x - 1 \notin [a, b)$, trebuie ca $f(x) = x + 1$, $\forall\, x \in [a, a+1)$. Aşadar $f([a, a+1)) = [a+1, a+2)$. Cum f este injectivă, trebuie ca $f([a+2, a+3)) \cap f([a, a+1)) = \emptyset$. Obţinem $f(x) = x + 1$, $\forall\, x \in [a+2, a+3)$, deci $f([a+2, a+3)) = [a+3, a+4)$. Inductiv se demonstrează că $\forall\, k = \overline{1, n}$, $\forall\, x \in [a+2k-2, a+2k-1)$, $f(x) = x + 1$. Atunci, $f([a+2k-2, a+2k-1)) = [a+2k-1, a+2k)$, $\forall\, k = \overline{1, n}$.

I. Dacă $r \in (0, 1)$, atunci $\forall\, x \in [b-r, b)$, avem $x+1 \notin [a, b)$, deci trebuie ca $f(x) = x - 1$, $\forall\, x \in [b-r, b)$, aşadar $f([b-r, b)) = f([a+2n, b)) = [a+2n-1, b-1) \subset [a+2n-1, a+2n)$. Dar $f([a+2n-2, a+2n-1)) = [a+2n-1, a+2n)$, contradicţie cu injectivitatea lui f.

II. Dacă $r \in [1, 2)$, atunci se arată analog că, pentru ca f să fie injectivă, e necesar ca $\forall\, x \in [b-1, a+2n+1) \subset [a+2n, a+2n+1)$, avem $f(x) \neq x - 1$. Dar $x+1 \notin [a, b)$, deci $f(x) \neq x+1$, contradicţie. Aşadar $b - a = 2n$ şi se arată inductiv că $\forall\, k = \overline{1, n}$, $\forall\, x \in [b-2k+1, b-2k+2)$, $f(x) = x - 1$, deci $f = f_0$.

b) Dacă $b - a$ este un număr natural par şi $f : [a, b) \to [a, b)$ are proprietatea (P), se arată uşor că f injectivă $\Leftrightarrow$ f surjectivă $\Leftrightarrow$ $f = f_0$.

Dacă funcţiile $f, g : [a, b) \to [a, b)$ au proprietatea (P) şi funcţia $g \circ f$ este bijectivă, atunci f este injectivă, deci $b - a$ este un număr natural par. Deoarece g este surjectivă, obţinem că $f = g = f_0$.

9. *Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ şi mulţimile $A_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ şi $\mathcal{F}_n = \{f : A_n \to \{0, 1\}\}$.*

a) Să se arate că pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$, $k < n - 1$ sau $k > 2^n - n + 1$, nu există funcţiile distincte $f_1, f_2, \ldots, f_k \in \mathcal{F}_n$, astfel încât funcţia $g_k : A_n \to \mathbb{R}$, $g_k = f_1 + f_2 + \cdots + f_k$ să fie injectivă.

b) Să se arate că pentru orice $k \in \{n-1, n, \ldots, 2^n - n + 1\}$ există funcţiile distincte $f_1, f_2, \ldots, f_k \in \mathcal{F}_n$, astfel încât funcţia $g_k : A_n \to \mathbb{R}$, $g_k = f_1 + f_2 + \cdots + f_k$ este injectivă.

(*Dana Heuberger, Lista scurtă pentru Olimpiada Naţională, 2008*)

Soluţie. *a*) Există 2^n funcţii în mulţimea $\mathcal{F}_n$. Evident, trebuie să avem $k \geq 2$. Presupunem că pentru $k < n-1$ există funcţii $g_k : A_n \to \mathbb{R}$ cu proprietatea din enunţ. Atunci, $\forall\, i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $g_k(i) \leq k < n-1$, deci g_k nu poate fi injectivă, contradicţie.

Presupunem că pentru $k > 2^n - n + 1$ există funcţii $g_k : A_n \to \mathbb{R}$ cu proprietatea din enunţ. Funcţia $g_{2^n} : A_n \to R$, $g_{2^n} = f_1 + f_2 + \cdots + f_{2^n}$ este constantă, căci $g_{2^n}(i) = 2^{n-1}$, $\forall\, i \in A_n$. Pentru ca eliminând din g_{2^n} cel mult $n-2$ dintre funcţii, suma rămasă să fie o funcţie injectivă, este necesar ca suma funcţiilor eliminate să fie injectivă, ceea ce este imposibil, conform primei părţi a demonstraţiei.

b) Pentru $k = n-1$, o soluţie este funcţia $g_{n-1} : A_n \to \mathbb{R}$, $g_n = f_1 + f_2 + \cdots + f_{n-1}$, unde $f_t(k) = \begin{cases} 0, & k \leq n-t \\ 1, & k > n-t \end{cases}$, $\forall\, t \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$.

Pentru o funcţie $f \in \mathcal{F}_n$, numim complementara acesteia, funcţia $\overline{f} : A_n \to \{0, 1\}$, $\overline{f}(x) = \begin{cases} 1, & f(x) = 0 \\ 0, & f(x) = 1 \end{cases}$. Vom demonstra mai mult, şi anume că din orice soluţie $g_{n-1} : A_n \to \mathbb{R}$ a problemei, putem construi o soluţie $g_k : A_n \to \mathbb{R}$ a problemei, cu $k \in \{n, n+1, \ldots, 2^n - n + 1\}$. De fapt, oricum am alege o soluţie $g_{n-1} : A_n \to \mathbb{R}$ a problemei, printre funcţiile $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$ din componenţa acesteia nu putem avea două funcţii complementare. Într-adevăr, pentru $n = 3$, ar rezulta că $g_2(i) = 1$, $\forall\, i \in A_n$, fals, iar pentru $n \geq 4$, aceasta ar implica faptul că am avea o soluţie $g_{n-3} : A_n \to \mathbb{R}$ a problemei, ceea ce, conform punctului *a*) este fals. În plus, printre funcţiile $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$ există maximum una dintre funcţiile g, $\overline{g} : A_n \to \{0, 1\}$, $g(x) = 0$, $\forall\, x \in A_n$ şi $\overline{g}(x) = 1$, $\forall\, x \in A_n$.

Pentru $t \in \{1, 2, \ldots, 2^{n-1} - n + 1\}$, alegem funcţiile $f_n, \overline{f}_n, f_{n+1}, \overline{f}_{n+1}, \ldots, f_{n+t-1}, \overline{f}_{n+t-1} : A_n \to \mathbb{R}$, distincte şi diferite de $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$. Astfel, pentru $t = 2^{n-1} - n + 1$, rămân neselectate complementarele funcţiilor $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$. Deoarece $(f_{n+i} + \overline{f}_{n+i})(j) = 1$, $\forall\, i = \overline{0, t-1}$ şi $\forall\, j \in A_n$, funcţia $g_{n+2t-1} : A_n \to \mathbb{R}$, $g_{n+2t-1} = g_{n-1} + f_n + \overline{f}_n + \cdots + f_{n+t-1} + \overline{f}_{n+t-1}$ este în continuare injectivă. Pentru $t \in \{1, 2, \ldots, 2^{n-1} - n\}$, definim funcţia

$$g_{n+2t} : A_n \to \mathbb{R},\ g_{n+2t} = \begin{cases} g_{n+2t-1} + g, & g \notin \{f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}\} \\ g_{n+2t-1} + \overline{g}, & g \in \{f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}\} \end{cases}.$$

Funcţia g_{n+2t} este de asemenea injectivă, $\forall\, t \in \{1, 2, \ldots, 2^{n-1} - n\}$.

10. *Să se rezolve ecuaţia* $2^x + 2 \cdot 4^{[x]} = 3^{\{x\}}$, *unde* $[x]$ *şi* $\{x\}$ *reprezintă respectiv partea întreagă şi partea fracţionară a numărului real* x.

(*Dana Heuberger*)

Soluţie. Deoarece $\{x\} \in [0,1)$, rezultă că $3^{\{x\}} \in [1,3)$. Dacă $[x] \geq 0$, atunci $2^x + 2 \cdot 4^{[x]} \geq 2^0 + 2 \cdot 4^0 = 3$, fals. Deci $[x] \leq -1$.

Dacă $[x] < -1$, atunci $x < -1$ şi $2^x + 2 \cdot 4^{[x]} < 2^{-1} + 2 \cdot 4^{-1} = 1$, fals. Analizăm cazul $[x] = -1$. Ecuaţia devine $2^{-1} \cdot 2^{\{x\}} + 2 \cdot \dfrac{1}{4} = 3^{\{x\}}$. Notând $\{x\} = t$, obţinem ecuaţia $\left(\dfrac{2}{3}\right)^t + \left(\dfrac{1}{3}\right)^t = 2$ cu soluţia unică $t = 0$. Deci $x = -1$ este unica soluţie a ecuaţiei date.

11. *Să se arate că pentru orice* $n, p \in \mathbb{N}^*$,

$$3^{-\frac{p}{n}} + 3^{-\frac{n}{p}} < \left(\frac{n}{n+1}\right)^p + \left(\frac{p}{p+1}\right)^n \leq 1.$$

(*Ludovic Longaver, Liceul "Németh Laszlo"*)

Soluţie. Din inegalitatea lui Bernoulli $(1+x)^k \geq 1 + kx$, $x \geq -1$, $k \in \mathbb{N}^*$, pentru $x = \dfrac{1}{n}$ şi $k = p$ obţinem:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^p \geq 1 + \frac{p}{n} \Rightarrow \left(\frac{n}{n+1}\right)^p \leq \frac{n}{n+p}. \tag{1}$$

Analog pentru $x = \dfrac{1}{p}$ şi $k = n$ obţinem

$$\left(1 + \frac{1}{p}\right)^n \geq 1 + \frac{n}{p} \Rightarrow \left(\frac{p}{p+1}\right)^n \leq \frac{p}{n+p}. \tag{2}$$

Din (1) şi (2) prin adunare obţinem $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^p + \left(\dfrac{p}{p+1}\right)^n \leq 1$.

Se ştie că $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n < 3$. Atunci

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^p < 3^{\frac{p}{n}} \Rightarrow \left(\frac{n}{n+1}\right)^p > 3^{-\frac{p}{n}}$$
$$\left(1 + \frac{1}{p}\right)^n < 3^{\frac{n}{p}} \Rightarrow \left(\frac{p}{p+1}\right)^n > 3^{-\frac{n}{p}}.$$

Deci $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^p + \left(\dfrac{p}{p+1}\right)^n > 3^{-\frac{p}{n}} + 3^{-\frac{n}{p}}$.

12. *Să se rezolve sistemul:* $\begin{cases} x^2+x^6+\lg x = y+y^3 \\ y^2+y^6+\lg y = z+z^3 \\ z^2+z^6+\lg z = x+x^3 \end{cases}$.

(*Nicolae Muşuroia*)

Soluţie. Fie $0<x\le y$. Atunci:

$$\begin{cases} x^2 \le y^2 \\ x^6 \le y^6 \\ \lg x \le \lg y \end{cases} \Rightarrow x^2+x^6+\lg x \le y^2+y^6+\lg y \Rightarrow y+y^3 \le z+z^3.$$

Obţinem $y\le z$. Analog $z\le x$. Deci $x\le y\le z\le x$. Atunci $x=y=z$ şi din prima ecuaţie rezultă

(1) $$x^2+x^6+\lg x = x+x^3 \Rightarrow x^2+x^6+\lg x^2 = x+x^3+\lg x.$$

Considerăm funcţia $g:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=x+x^3+\lg x$. Evident g este o funcţie strict crescătoare, fiind o sumă de funcţii strict crescătoare.
Din (1) obţinem: $g(x^2)=g(x)$; din injectivitatea funcţiei g rezultă $x^2=x$, $x>0$. Deci $x=1$. Atunci soluţia sistemului este $x=y=z=1$.

13. *Să se arate că* $\sum\cos(\pm x_1\pm x_2\pm\cdots\pm x_n)\le 2^n\left(\cos\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}\right)^n$, *unde* $n\in\mathbb{N}$, $n\ge 2$, *iar* $x_1,x_2,\ldots,x_n\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, *suma efectuându-se după toate cele* 2^n *alegeri ale semnelor ”−” şi ”+”.*

(*Nicoloae Muşuroia, Ion Savu*)

Soluţie. Prin inducţie după n se arată că

(1) $$\cos x_1\cos x_2\ldots\cos x_n=\frac{1}{2^n}\sum\cos(\pm x_1\pm x_2\pm\cdots\pm x_n).$$

Considerăm funcţia $f:\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\cos x$, care este o funcţie descrescătoare, fiind compusă dintr-o funcţie crescătoare şi una descrescătoare. Cum funcţia $g:\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)\to(0,1]$, $g(x)=\cos x$ este concavă, iar funcţia $h:(0,1]\to\mathbb{R}$, $h(x)=\ln x$ este concavă şi crescătoare, obţinem că funcţia $f=h\circ g$ este concavă. Din inegalitatea lui Jensen şi inegalitatea mediilor, şi deoarece funcţia f este descrescătoare, rezultă:

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}\le f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)\le f\left(\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}\right),$$

deci

$$f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) \leq nf\Big(\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}\Big),$$

adică

$$\ln \cos x_1 + \ln \cos x_2 + \cdots + \ln \cos x_n \leq n \ln \cos \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}.$$

Obţinem $\cos x_1 \cdot \cos x_2 \ldots \cos x_n \leq \big(\cos \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}\big)^n$. Folosind (1) rezultă concluzia.

14. *Se consideră* $n \in \mathbb{N}^*$. *Să se determine numerele* $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (0, \infty)$, *ştiind că*

$$x_1^{\log_{25} x_1} + x_2^{\log_{25} x_2} + \cdots + x_n^{\log_{25} x_n} = \frac{1}{25}\left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2\right).$$

(*Crina Petruţiu*)

Soluţie. Se verifică

$$x^{\log_{25} x} \geq \frac{1}{25}\, x^2,\ \forall\, x > 0 \tag{1}$$

cu egalitate pentru $x = 25$. Atunci

$$\begin{aligned}\frac{1}{25}\left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2\right) &= x_1^{\log_{25} x_1} + x_2^{\log_{25} x_2} + \cdots + x_n^{\log_{25} x_n}\\ &\geq \frac{1}{25}\left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2\right),\end{aligned}$$

deci avem egalitate numai dacă $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 25$.

15. *Dacă* $c, d \in \mathbb{R}$ *şi* $a, b \in (0,1)$ *sau* $a, b \in (1, \infty)$, *să se arate că*

$$cd \cdot \ln^2 \frac{a}{b} \geq \ln\left(\frac{a^c}{b^d}\right) \ln\left(\frac{a^d}{b^c}\right).$$

(*Ovidiu T. Pop, Colegiul Naţional "Mihai Eminescu", Satu Mare*)

Soluţie. Trebuie demonstrat că $\dfrac{\ln a^c - \ln b^d}{\sqrt{cd}} \cdot \dfrac{\ln a^d - \ln b^c}{\sqrt{cd}} \le (\ln a - \ln b)^2$.
Dar

$$\begin{aligned}
\frac{\ln a^c - \ln b^d}{\sqrt{cd}} \cdot \frac{\ln a^d - \ln b^c}{\sqrt{cd}} &= \frac{c\ln a - d\ln b}{\sqrt{cd}} \cdot \frac{d\ln a - c\ln b}{\sqrt{cd}} \\
&= \left(\sqrt{\frac{c}{d}}\ln a - \sqrt{\frac{d}{c}}\ln b\right)\left(\sqrt{\frac{d}{c}}\ln a - \sqrt{\frac{c}{d}}\ln b\right) \\
&= \ln^2 a + \ln^2 b - \left(\frac{d}{c} + \frac{c}{d}\right)\ln a \ln b \\
&\le \ln^2 a + \ln^2 b - 2\ln a \ln b = (\ln a - \ln b)^2.
\end{aligned}$$

Clasa a XI-a

1. *Se consideră şirul* $(x_n)_{n\ge 1}$*, unde* $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{3^k - k^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$. *Să se arate că şirul este convergent.*

(*Gheorghe Boroica*)

Soluţie. Prin inducţie matematică se demonstrează că $3^n \ge n^3$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
Deoarece

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{3^{n+1} - (n+1)^2} > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \tag{1}$$

şirul $(x_n)_{n\ge 1}$ este strict crescător. Cum

$$\begin{aligned}
x_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k - k^2} = \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{3^k - k^2} \le \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^3 - k^2} \\
&\le \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) \\
&= \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{n} < \frac{3}{2},
\end{aligned}$$

$\forall n \ge 2$, deducem că şirul dat este mărginit superior. Folosind aceasta, relaţia (1) şi teorema lui Weierstrass, deducem că şirul dat este convergent.

2. *Fie* $m \in \mathbb{N}$, $m \ge 2$. *Definim şirul* $(x_n^{(m)})_{n\ge 1}$ *prin:*

$$x_n^m = 1 + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \cdots + \frac{1}{n^m},\ \forall n \ge 1.$$

a) Să se arate că şirul $(x_n^{(m)})_{n\geq 1}$ *este convergent.*

b) Notând cu $l_m = \lim\limits_{n\to\infty} x_n^{(m)}$*, să se determine* $k \in \mathbb{N}$ *pentru care există, este finită şi nenulă limita* $\lim\limits_{n\to\infty} n^k(l_m - x_n^{(m)})$.

(*Costel Chiteş, Olimpiada locală, Bucureşti, 2008*)

Soluţie. *a*) Deoarece $x_{n+1}^{(m)} - x_n^{(m)} = \dfrac{1}{(n+1)^m} > 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ şi

$$\begin{aligned} x_m^{(m)} \leq x_n^{(2)} &= 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} \\ &= 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 2 - \frac{1}{n} < 2, \end{aligned}$$

$\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ şi $m \geq 2$, rezultă că şirul $(x_n^{(m)})_{n\geq 1}$ este strict crescător şi mărginit superior, deci convergent.

b) Fie

$$L_m = \lim_{n\to\infty} n^k(l_m - x_n^{(m)}) = \lim_{n\to\infty} n^{k-m+1} \frac{l_m - x_n^{(m)}}{\frac{1}{n^{m-1}}} = \lim_{n\to\infty} n^{k-m+1} a_n,$$

unde $a_n = n^{m-1}(l_m - x_n^{(m)})$.
Din lema lui Stolz-Cesàro (cazul $\frac{0}{0}$) obţinem:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{x_n^{(m)} - x_{n+1}^{(m)}}{\frac{1}{(n+1)^{m-1}} - \frac{1}{n^{m-1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{-\frac{1}{(n+1)^m}}{\frac{n^{m-1}-(n+1)^{m-1}}{n^{m-1}(n+1)^{m-1}}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{m-1}}{(n+1)[(n+1)^{m-1} - n^{m-1}]} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n^{m-2}}{C_{m-1}^1 n^{m-2} + C_{m-1}^2 n^{m-3} + \cdots + C_{m-1}^{m-1}} = \frac{1}{m-1}\,. \end{aligned}$$

Aşadar, $L_m = \lim\limits_{n\to\infty} n^{k-m+1} a_n = \begin{cases} 0, & k < m-1 \\ \dfrac{1}{m-1}, & k = m-1 \\ +\infty, & k > m-1 \end{cases}$, de unde rezultă că ne convine $k = m-1$.

3. *Se consideră şirurile reale* $(x_n)_{n\geq 1}$, $(y_n)_{n\geq 1}$, *care verifică proprietăţile: (i)* $x_n \cdot y_n \neq 0$, $\forall\, n \geq 1$ *şi (ii) există* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$.

a) *Să se arate că şirul* $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ *cu* $\alpha_n = \dfrac{x_n^3 + y_n^5}{x_n^2 + y_n^4}$, $\forall\, n \geq 1$, *are limită.*

b) *Să se decidă dacă există două şiruri reale* $(x_n)_{n\geq 1}$, $(y_n)_{n\geq 1}$ *cu proprietăţile*

(i) $x_n \cdot y_n \neq 0$, $\forall\, n \geq 1$ (ii) *există* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$.

(iii) *şirul* $(\beta_n)_{n\geq 1}$ *definit prin* $\beta_n = \dfrac{2x_n^6 - y_n^9}{x_n^2 - y_n^3}$, $\forall\, n \geq 1$, *nu are limită.*

(*Costel Chiteş, Colegiul Naţional de Informatică "T. Vianu" Bucureşti*)

Soluţie. *a*) Utilizând ipoteza şi inegalitatea modulului, obţinem:

$$|\alpha_n| = \frac{|x_n^3 + y_n^5|}{x_n^2 + y_n^4} \leq \frac{|x_n^3|}{x_n^2 + y_n^4} + \frac{|y_n^5|}{x_n^2 + y_n^4} \leq \frac{|x_n^3|}{x_n^2} + \frac{|y_n^5|}{y_n^4} = |x_n| + |y_n| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Aşadar, $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

b) Fie $y_n^3 - x_n^2 = a_n$, $n \geq 1$, deci $y_n = \sqrt[3]{x_n^2 + a_n}$, unde $(a_n)_{n\geq 1}$ este un şir convenabil ales. Atunci avem:

$$\beta_n = \frac{y_n^9 - 2x_n^6}{y_n^3 - x_n^2} = \frac{(a_n + x_n^2)^3 - 2x_n^6}{a_n} = a_n^2 + 3a_n \cdot x_n^2 + 3x_n^4 - \frac{x_n^6}{a_n},\ n \geq 1.$$

Alegând acum şirul $a_n = x_n^{6+p}$, $\forall\, n \geq 1$, unde $p \in \mathbb{N}$, p impar şi x_n un şir alternant care tinde la zero, de exemplu $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$, deducem că şirul $(\beta_n)_{n\geq 1}$ nu are limită deoarece $a_n \to 0$, $x_n \to 0$ şi $\dfrac{x_n^6}{a_n} = \dfrac{1}{x^p}$ nu are limită.

4. *Fie* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. *Dacă* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, *cu proprietatea că*

$$A^7 = A^5 + A^4 + A^3 + A^2 + A + I_n,$$

să se arate că $\det(A) > 0$.

(*Costel Chiteş, Colegiul Naţional de Informatică "T. Vianu" Bucureşti*)

Soluţie. Pe parcursul soluţiei o să folosim următoarea proprietate.
Lemă. *Dacă* $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *şi* $AB = BA$, *unde* $n \in |\mathbb{N}$, $n \geq 2$, *atunci* $\det(A^2 + B^2) \geq 0$.

Relaţia dată se scrie $A^7 = (A + I_n)(A^4 + A^2 + I_n)$. Trecând la determinanţi se obţine

$$(1)\qquad (\det A)^7 = \det(A + I_n)\det(A^4 + A^2 + I_n).$$

Relaţia din ipoteză se mai scrie $A(A^6 - A^4 - A^3 - A^2 - A - I_n) = I_n$. Trecând aici la determinanţi vom găsi că

(2) $$\det A \neq 0.$$

Pe de altă parte, adunând A^6 în relaţia dată, obţinem:

$$A^6(A + I_n) = A^6 + A^5 + A^4 + A^3 + A^2 + A + I_n,$$

de unde

(3) $$(\det A)^6 \cdot \det(A + I_n) = \det(A^6 + A^5 + A^4 + A^3 + A^2 + A + I_n).$$

Dacă $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ şi $\varepsilon \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$ $(n \geq 2)$, atunci

$$\begin{aligned}\det(X - \varepsilon I_n)(X - \overline{\varepsilon} I_n) &= \det(X - \varepsilon I_n) \det(\overline{X - \varepsilon I_n}) \\ &= \det(X - \varepsilon I_n)\overline{\det(X - \varepsilon I_n)} = |\det(X - \varepsilon I_n)|^2 \geq 0.\end{aligned}$$

Folosind relaţia anterioară şi considerând rădăcinile de ordinul şapte a unităţii 1, ε, ε^2, ε^3, ε^4, ε^5, ε^6, vom avea că

$$\begin{aligned}&\det(A^6 + A^5 + A^4 + A^3 + A^2 + A + I_n) \\ &= \det[(A - \varepsilon I_n)(A - \varepsilon^2 I_n)(A - \varepsilon^3 I_n)(A - \varepsilon^4 I_n)(A - \varepsilon^5 I_n)(A - \varepsilon^6 I_n)] \\ &= \det[(A - \varepsilon I_n)(A - \overline{\varepsilon} I_n)] \det[(A - \varepsilon^2 I_n)(A - \overline{\varepsilon^2} I_n)] \det[(A - \varepsilon^3 I_n)(A - \overline{\varepsilon^3} I_n)] \\ &\geq 0.\end{aligned}$$

Deoarece $\det(A^4 + A^2 + I_n) = \det\left[\left(A^2 + \frac{1}{2} I_n\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} I_n\right)^2\right] \geq 0$, folosind (1) şi (2) obţinem că numerele $\det A$ şi $\det(A + I_n)$ au acelaşi semn. Din relaţia (3) deducem acum că $\det(A + I_n) > 0$, deci $\det A > 0$.

5. *Se consideră mulţimea* $A = \left\{\sigma \in S_{2n} \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} \sigma(i) - \sum_{j=n+1}^{2n} \sigma(j) \geq n^2\right\}$.

a) Pentru $n = 2$, să se determine mulţimea A.

b) Pentru $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, să se determine numărul elementelor mulţimii A.

(*Traian Covaciu, Colegiul Naţional "Vasile Lucaciu"*)

Soluţie. *a*) Avem că $\sigma \in A \Leftrightarrow \sigma \in S_4$ şi $\sigma(1) + \sigma(2) - (\sigma(3) + \sigma(4)) \geq 4$. Deoarece $\sigma(1)+\sigma(2) \leq 7$ şi $\sigma(3)+\sigma(4) \geq 3$, avem $\sigma(1)+\sigma(2)-(\sigma(3)+\sigma(4)) \leq 4$. Folosind relaţia din ipoteză obţinem că $\sigma(1) + \sigma(2) = 7$ şi $\sigma(3) + \sigma(4) = 3$. Aşadar, $A = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4\}$, unde $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Dacă $\sigma \in S_{2n}$, atunci:

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma(i) \leq 2n + (2n-1) + \cdots + (n+1) = \frac{n(3n+1)}{2};$$
$$\sum_{j=n+1}^{n} \sigma(j) \leq 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Aşadar,

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma(i) - \sum_{j=n+1}^{2n} \sigma(j) \leq \frac{n(3n+1)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} = n^2. \tag{1}$$

Relaţia $\sigma \in A \Leftrightarrow \sigma \in S_{2n}$ şi $\sum\limits_{i=1}^{n} \sigma(i) - \sum\limits_{j=n+1}^{2n} \sigma(j) \geq n^2$. Conform relaţiei (1) vom avea egalitate, deci $\sum\limits_{i=1}^{n} \sigma(i) = \dfrac{n(3n+1)}{2}$ şi $\sum\limits_{j=n+1}^{2n} \sigma(j) = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Deducem că numerele $\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n) \in \{n+1, n+2, \ldots, 2n\}$ şi acestea pot fi alese în $n!$ moduri. La fiecare din aceste posibilităţi, numerele $\sigma(n+1)$, $\sigma(n+2), \ldots, \sigma(2n) \in \{1, 2, \ldots, n\}$ şi ele pot fi alese tot în $n!$ moduri. Atunci $card\, A = (n!)^2$ conform regulii produsului.

6. *Să se determine $a > 0$, astfel încât $\dfrac{1}{x} \geq (a \cdot x)^{1-x}$, $\forall\, x > 0$.*

(*Cristian Heuberger*)

Soluţie. Înmulţind inegalitatea cu $a \cdot x$ obţinem $a \geq (a \cdot x)^{2-x}$, $\forall\, x > 0$ şi prin logaritmare naturală $\ln a \geq (2-x)(\ln a + \ln x)$, $\forall\, x > 0$. Observăm că pentru $x = 1$ are loc egalitatea şi deci $x = 1$ este punct de maxim local al funcţiei $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = (2-x)(\ln a + \ln x)$. Conform teoremei lui Férmat $f'(1) = 0$ şi cum $f'(x) = -(\ln a + \ln x) + \dfrac{2-x}{x}$ rezultă imediat $a = e$.

Pentru $a = e$, obţinem $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = (2-x)(1 + \ln x)$ şi $f'(x) = -(1+\ln x) + \dfrac{2-x}{x} = -2 - \ln x + \dfrac{2}{x}$. Evident f' este strict descrescătoare, singurul punct critic fiind aşadar $x = 1$.

Tabelul de variaţie al funcţiei f este:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	|	$+ + + + + + +$	0	$- - - - - - - - - - - - - - - - -$	
$f(x)$	|	$\nearrow$	1	$\searrow$	

Rezultă $1 \geq f(x)$, $\forall\, x > 0$, adică $\ln e \geq (2-x)(\ln e + \ln x)$, $\forall\, x > 0$.
Obţinem $\dfrac{1}{x} \geq (e \cdot x)^{1-x}$, $\forall\, x > 0$, deci $a = e$ este unica soluţie.

7. *Dacă* $x_0 \geq 0$*, să se demonstreze că şirul* $(x_n)_{n\geq 0}$*,* $x_{n+1} = \dfrac{1}{e}(e \cdot x_n)^{2-x_n}$ *este convergent şi să se calculeze limita acestuia.*

(*Cristian Heuberger*)

Soluţie. Pentru $x_0 = 0$ şirul este constant nul şi deci convergent la 0. Pentru $x_0 = 1$ şirul este constant, convergent la 1.

Considerăm în continuare $x_0 > 0$, $x_0 \neq 1$. Evident toţi termenii sunt strict pozitivi. Se poate demonstra că $\dfrac{1}{e}(e \cdot x)^{2-x} \leq 1$, $\forall\, x > 0$, egalitatea având loc doar pentru $x = 1$. Rezultă că toţi termenii începând cu cel de rang 1 sunt situaţi în $(0, 1)$. Şirul este aşadar mărginit.

Dacă $x_1 < \dfrac{1}{e}$, rezultă $x_2 = \dfrac{1}{e}(e \cdot x_1)^{2-x_1} = x_1 \underbrace{(e \cdot x_1)^{1-x_1}}_{\in(0,1)} < x_1 < \dfrac{1}{e}$.
Evident, inductiv, se demonstrează că şirul este strict descrescător.

Dacă $x_1 = \dfrac{1}{e}$, şirul este constant, convergent la $\dfrac{1}{e}$.

Dacă $x_1 > \dfrac{1}{e}$, rezultă $x_2 = \dfrac{1}{e}(e \cdot x_1)^{2-x_1} = x_1 \underbrace{(e \cdot x_1)^{1-x_1}}_{\in(1,+\infty)} > x_1 > \dfrac{1}{e}$.
Evident, inductiv se demonstrează că şirul este strict crescător.

În oricare dintre situaţii, conform teoremei lui Weierstrass, şirul este convergent. Dacă notăm $L = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \in [0, 1]$ şi dacă trecem la limită în relaţia de recurenţă, obţinem $L = \dfrac{1}{e}(e \cdot L)^{2-L}$ sau echivalent $L = L(e \cdot L)^{1-L}$.

Soluţiile acestei ecuaţii fiind 0, $\dfrac{1}{e}$ sau 1 şi ţinând seama de monotoniile posibile ale şirului şi de cele precizate iniţial, deducem că

$$L = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x_1 \in \left[0, \dfrac{1}{e}\right) \\ \dfrac{1}{e}, & \text{dacă } x_1 = \dfrac{1}{e} \\ 1, & \text{dacă } x_1 \in \left(\dfrac{1}{e}, 1\right] \end{cases}.$$

8. *Fie* $P \in \{p^2 | p$ *număr prim,* $p > 3\}$ *şi* $A \in \mathcal{M}_n(P)$. *Să se arate că* $24^{n-1} | \det(A)$.

(*Ludovic Longaver, Liceul "Németh Laszlo"*)

Soluţie. Cum p este număr prim, $p > 3$, restul împărţirii numărului p la 12 nu poate fi $0, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10$. Rămâne ca $p \in \{12 \cdot q + r | q \in \mathbb{N},\ r \in \{1, 5, 7, 11\}\}$. Atunci

$$p^2 \in \{144q^2 + 24qr + r^2 \,|\, r^2 \in \{1, 25, , 49, 121\}, q \in \mathbb{N}\} \Rightarrow$$
$$p^2 \in \{24q + 1 \,|\, q \in \mathbb{N}^*\}.$$

Elementele matricei A sunt de forma $24k + 1$, $k \in \mathbb{N}^*$. Scădem prima linie din celelalte linii şi dăm factor comun pe 24 de pe fiecare din liniile $2, 3, \ldots, n$ ale determinantului matricei A. Se obţine în acest mod concluzia dorită.

9. *Să se determine* $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, *cu* $f(1) = 0$, *pentru care există* $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ *astfel ca*

$$f(x) = \lim_{y \to \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{[y]} - g(xy)\right), \ \forall\, x \in (0, \infty).$$

(*Cristinel Mortici, Târgovişte*)

Soluţie. Se ştie că şirul $(C_n)_{n \geq 1}$, $C_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$ este convergent şi are limita egală cu C (C este constanta lui Euler).
Atunci, conform ipotezei, avem că

$$f(x) = \lim_{y \to \infty} (C_{[y]} + \ln[y] - g(x \cdot y)), \ \forall\, x > 0.$$

Pentru $x = 1$ avem:

$$f(1) = \lim_{y \to \infty} (C_{[y]} + \ln[y] - g(y)) \overset{x \geq 0}{=} \lim_{y \to \infty} (C_{[xy]} + \ln[xy] - g(xy)).$$

Aşadar, pentru orice $x > 0$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{y \to \infty} (C_{[y]} + \ln[y] + (C_{[xy]} + \ln[xy] - g(xy)) - (C_{[xy]} + \ln[xy])) \\ &= \lim_{y \to \infty} \left(C_{[y]} - C_{[xy]} - \ln \frac{[xy]}{[y]}\right) + f(1) \\ &= C - C - \ln x + 0 = -\ln x. \end{aligned}$$

Funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = -\ln x$, $\forall\, x > 0$ este soluţie pentru problemă.

10. *Să se calculeze* $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\sum\limits_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{\sqrt{ij}}}$.

(*Nicolae Muşuroia*)

Soluţie. Limita cerută este:

$$L \stackrel{not}{=} \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\sum\limits_{1\le i<j\le n}\frac{1}{\sqrt{ij}}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{1\le i<j\le n}\frac{1}{\sqrt{ij}}}$$

$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\left[\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\right)^2-\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right]} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}}{\sqrt{n}}\right)^2-\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}{n}\right]}$$

$$= e^2,$$

deoarece folosind teorema lui Stolz-Cesàro, avem:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = 2 \qquad \text{şi}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0.$$

11. *Se consideră* $n\in\mathbb{N}^*$*, mulţimile* $A=\{a_1,a_2,\dots,a_{3n+1}\}\subset[1,3^n)$ *şi*

$$\mathcal{M}=\left\{X=\begin{pmatrix}a & 3b\\ 3c & d\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\,\Big|\,a,b,c,d\in A\right\}.$$

Să se arate că în $\mathcal{M}$ *există cel puţin o matrice* X *cu* $\det(X)<0$.

(*Nicolae Muşuroia*)

Soluţie. Partiţionăm intervalul $[1,3^n)$ în n intervale disjuncte $I_k=[3^{k-1},3^k)$, $k=1,2,\dots,n$. Din ipoteză, în cele n intervale se găsesc $3n+1$ elemente ale mulţimii A. Conform principiului lui Dirichlet, va exista un interval I_p în care să se afle cel puţin patru elemente din A. Fie $a,b,c,d\in[3^{p-1},3^p)$. Atunci: $a\cdot d<9^p$ şi $9bc\ge 9\cdot 3^{p-1}\cdot 3^{p-1}=9^p$, deci $\det(X)=ad-9bc<0$.

Aşadar, matricea $X=\begin{pmatrix}a & 3b\\ 3c & d\end{pmatrix}\in\mathcal{M}$ verifică relaţia cerută.

12. *Se consideră matricele* $A,B,C\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *care comută două câte două şi* $\det(AB+BC+CA)=0$*. Să se arate că:*

$$\det(A^2+B^2+C^2+\alpha(AB+BC+CA)\ge 0,$$

pentru $\alpha\in[-1,2]$.

(*Nicolae Muşuroia*)

Soluţie. Considerăm funcţia polinomială

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\det(A^2+B^2+C^2+x(AB+BC+CA)).$$

Atunci avem:

$$f(2)=\det(A+B+C)^2=(\det(A+B+C))^2\geq 0$$

şi

$$f(-1)=\det(A^2+B^2+C^2-AB-BC-CA)=\det(A^2+B^2+C^2)\geq 0.$$

Deoarece $f(x)=x^2\det(AB+BC+CA)+\beta\cdot X+\det(A^2+B^2+C^2)$, $\beta\in\mathbb{R}$ şi $\det(AB+BC+CA)\overset{ip}{=}0$, rezultă că $f(x)=\beta\cdot X+\det(A^2+B^2+C^2)$, deci f este o funcţie de gradul întâi sau o funcţie constantă. Din $f(2)\geq 0$ şi $f(-1)\geq 0$ deducem că $f(x)\geq 0$ pentru orice $\alpha\in[-1,2]$.

13. *Fie* $m,n\in\mathbb{N}^*$ *şi* $A\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. *Să se arate că*
a) $A\cdot A^T=O_{m,n}\Leftrightarrow A=O_{m,n}$.
b) Dacă $m\leq n$, *există* $A\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ *astfel încât* $\det(A\cdot A^T)\neq 0$.
c) Dacă $m>n$, *atunci* $\det(A\cdot A^T)=0$.

(*Ovidiu T. Pop, Colegiul Naţional "Mihai Eminescu" Satu Mare*)

Soluţie. Fie $A=(a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}}$. Atunci

$$A\cdot A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1}\\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2}\\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot\\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}$$

deci

$$A\cdot A^T=\begin{pmatrix} a_{11}^2+a_{12}^2+\dots+a_{1n}^2 & a_{11}a_{21}+a_{12}a_{22}+\dots+a_{1n}a_{2n} & \dots & a_{11}a_{m1}+a_{12}a_{m2}+\dots+a_{1n}a_{mn}\\ a_{21}a_{11}+a_{22}a_{12}+\dots+a_{2n}a_{1n} & a_{21}^2+a_{22}^2+\dots+a_{2n}^2 & \dots & a_{21}a_{m1}+a_{22}a_{m2}+\dots+a_{2n}a_{mn}\\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot\\ a_{m1}a_{11}+a_{m2}a_{12}+\dots+a_{mn}a_{1n} & a_{m1}a_{21}+a_{m2}a_{22}+\dots+a_{mn}a_{2n} & \dots & a_{m1}^2+a_{m2}^2+\dots+a_{mn}^2\end{pmatrix}$$

a) Dacă $A=O_{m,n}$, atunci rezultă în mod evident că

$$A\cdot A^T=O_{m,m}. \tag{1}$$

Dacă $A\cdot A^T=O_{m,m}$, atunci din relaţia (1) rezultă că şi elementele de pe diagonala principală sunt nule, de unde $a_{ij}=0$, $\forall\, i\in\{1,2,\dots,m\}$ şi $\forall\, j\in\{1,2,\dots,n\}$, deci $A=O_{m,n}$.

$b)$ Luăm $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ şi atunci $A \cdot A^T = I_m$, deci $\det(A \cdot A^T) = \det I_m = 1 \neq 0$.

$c)$ Considerăm matricea $B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$.

Prin calcul se arată că

$$B \cdot B^T = A \cdot A^t. \tag{2}$$

Folosind relaţia (2), avem:

$$\det(A \cdot A^T) = \det(B \cdot B^T) = \det(B) \cdot \det(B^T) = 0$$

căci $\det(B) = 0$.

14. *Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ o matrice cu proprietatea*

$$S(A) = S(A^2) = \dots = S(A^n) = 0,$$

unde $S(A^k)$ este suma tuturor elementelor matricei A^k, $k = \overline{1, n}$.
Să se arate că:

a) Determinantul matricei A este egal cu zero.

b) $S(A^k) = 0$, pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$.

c) Să se dea exemplu de matrice nenulă A cu proprietatea din enunţ.

(*Vasile Pop, Concursul interjudeţean "Al. Papiu Ilarian", 2008*)

Soluţie. Din teorema Cayley-Hamilton obţinem:

$$A^n - \sigma_1 A^{n-1} + \sigma_2 A^{n-2} - \dots + (-1)^{n-1}\sigma_{n-1} A + (-1)^n \det(A) I_n = O_n. \tag{1}$$

$a)$ Aplicăm S în (1):

$$S(A^n) - \sigma_1 S(A^{n-1}) + \sigma_2 S(A^{n-2}) - \dots + (-1)^{n-1}\sigma_{n-1} S(A) + (-1)^n \det(A) n = 0.$$

Din ipoteză şi această ultimă relaţie, rezultă $\det(A) = 0$.

$b)$ Înmulţim în (1) cu A:

$$A^{n+1} - \sigma_1 A^n + \sigma_2 A^{n-1} - \dots + (-1)^{n-1}\sigma_{n-1} A^2 + (-1)^n \det(A) A = O_n. \tag{2}$$

Aplicăm S în (2):

$$S(A^{n+1}) - \sigma_1 S(A^n) + \sigma_2 S(A^{n-1}) - \dots + (-1)^{n-1}\sigma_{n-1} S(A^2) + (-1)^n \det(A) S(A) = 0.$$

Din ipoteză rezultă $S(A^{n+1}) = 0$. Înmulţim în (1) cu A^2:

(3) $A^{n+2} - \sigma_1 A^{n+1} + \sigma_2 A^n - \cdots + (-1)^{n-1}\sigma_{n-1}A^3 + (-1)^n \det(A)A^2 = O_n$.

Aplicăm S în (3) şi deducem că $S(A^{n+2}) = 0$. Prin inducţie se arată că $S(A^{n+m}) = 0, \forall\, m \in \mathbb{N}^*$.

$$c)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Prin inducţie se arată că $A^m = A$, $\forall\, m \in \mathbb{N}^*$. Atunci $S(A^m) = S(A) = 0$, $\forall\, m \in \mathbb{N}^*$.

15. *Fie* $f_1, f_2, f_3, f_4 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *funcţii de grad cel mult doi. Să se demonstreze că pentru orice numere* $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{C}$ *are loc egalitatea:*

$$\begin{vmatrix} f_1(a_1) & f_1(a_2) & f_1(a_3) & f_1(a_4) \\ f_2(a_1) & f_2(a_2) & f_2(a_3) & f_2(a_4) \\ f_3(a_1) & f_3(a_2) & f_3(a_3) & f_3(a_4) \\ f_4(a_1) & f_4(a_2) & f_4(a_3) & f_4(a_4) \end{vmatrix} = 0.$$

(*Magda Vişovan, Liceul "Regele Ferdinand, Sighetu Marmaţiei"*)

Soluţie. Dacă printre numerele a_1, a_2, a_3, a_4 există cel puţin două egale, atunci determinantul cerut are două coloane identice şi în consecinţă el este egal cu 0.

Presupunem în continuare că numerele a_1, a_2, a_3, a_4 sunt distincte şi considerăm funcţia $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$F(x) = \begin{vmatrix} f_1(a_1) & f_1(a_2) & f_1(a_3) & f_1(x) \\ f_2(a_1) & f_2(a_2) & f_2(a_3) & f_2(x) \\ f_3(a_1) & f_3(a_2) & f_3(a_3) & f_3(x) \\ f_4(a_1) & f_4(a_2) & f_4(a_3) & f_4(x) \end{vmatrix}.$$

Dacă dezvoltăm determinantul anterior după ultima coloană, obţinem o funcţie polinomială de grad cel mult doi în x. Cum $F(a_1) = F(a_2) = F(a_3) = 0$, deducem că funcţia F are cel puţin trei rădăcini complexe distincte, deci F este funcţia nulă. Atunci $F(a_4) = 0$, de unde se obţine concluzia problemei.

Clasa a XII-a

1. *Se consideră numărul* $p \in [1, \infty)$ *şi şirul* $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(k+n)^{p-1}}{(k+n)^p + 1}$, $n \in \mathbb{N}^*$. *Să se calculeze* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

(*Gheorghe Boroica*)

Soluţie. Deoarece

$$\frac{1}{k+n+1}=\frac{(k+n)^{p-1}}{(k+n)^p+(k+n)^{p-1}}\leq\frac{(k+n)^{p-1}}{(k+n)^p+1}<\frac{(k+n)^{p-1}}{(k+n)^p}=\frac{1}{k+n}.$$

Însumând, obţinem:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+n+1}\leq x_n<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+n}\overset{not}{=}b_n.$$

Atunci

$$(1)\qquad b_n+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{n+1}\leq x_n\leq b_n.$$

Cum $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\ln 2$, obţinem din (1) că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\ln 2$.

2. *Se consideră ecuaţia $x^5+x^3-a=0$, unde $a\in(2,10)$. Notând cu x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 rădăcinile ecuaţiei, să se arate că*

$$\sum_{k=1}^{5}(\mathrm{Im}(x_k))^2>\frac{13}{4}.$$

(Gheorghe Boroica)

Soluţie. Considerăm funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^5+x^3-a$. Evident f este o funcţie continuă şi strict crescătoare. Cum $f(1)\cdot f\left(\frac{3}{2}\right)<0$, ecuaţia $f(x)=0$ are o unică rădăcină reală, $x_1\in\left(1,\frac{3}{2}\right)$. Atunci rădăcinile ecuaţiei $f(x)=0$ sunt: x_1, $x_2=a_1+b_1i$, $x_3=\overline{x}_2$, $x_4=a_2+b_2i$, $x_5=\overline{x}_4$, unde $a_1,a_2,b_1,b_2\in\mathbb{R}$, $b_1\cdot b_2\neq 0$.
Din $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0$, rezultă $2(a_1+a_2)=-x_1$, deci

$$(1)\qquad a_1+a_2\in\left(-\frac{3}{4},-\frac{1}{2}\right).$$

Din $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2=-2$, rezultă

$$(2)\qquad x_1^2+2(a_1^2+a_2^2)+2=2(b_1^2+b_2^2).$$

Cum $(a_1+a_2)^2 \le 2(a_1^2+a_2^2)$, din (1) deducem că $2(a_1^2+a_2^2) > \dfrac{1}{4}$, iar din (2) obţinem:

$$2(b_1^2+b_2^2) > x_1^2 + \frac{1}{4} + 2 > \frac{13}{4},$$

adică $\sum\limits_{i=1}^{5} (\operatorname{Im} x_i)^2 > \dfrac{13}{4}$.

3. *Să se arate că* $1 \le \displaystyle\int_3^5 \frac{1}{\sqrt{8x-x^2-12}}dx \le \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

(*Lucian Dragomir, Oţelu Roşu*)

Soluţie. Considerăm funcţia $f:[3,5]\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x^2+8x-12$. Deducem că $f(x)\ge 3$, $\forall x\in[3,5]$, deci $\dfrac{1}{\sqrt{f(x)}} \le \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $x\in[3,5]$.

Pe de altă parte $f(x)=(x-2)(6-x)$ şi cu inegalitatea mediilor avem $\sqrt{(x-2)(6-x)} \le \dfrac{x-2+6-x}{2} = 2$, $\forall x\in[3,5]$. Integrând între 3 şi 5, dubla inegalitate $\dfrac{1}{2} \le \dfrac{1}{\sqrt{f(x)}} \le \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $x\in[3,5]$, obţinem concluzia problemei.

4. *Pe mulţimea* $\mathbb{R}$ *se defineşte legea de compoziţie "$*$" astfel încât:*
a) $2*4=3$;
b) $(x\cdot y)*(x\cdot z) = x(y*z)$, $\forall x,y,z\in\mathbb{R}$;
c) $(x+y)*(x+z) = x+(y*z)$, $\forall x,y,z\in\mathbb{R}$.

i) *Să se calculeze* $1*2$, $2*2$, $\dfrac{1}{4}*\dfrac{1}{2}$.

ii) *Să se determine numărul perechilor ordonate* (a,b) *de numere naturale nenule pentru care* $a*b=2009$.

(*Lucian Dragomir, Oţelu Roşu*)

Soluţie. *i*) $\left.\begin{array}{l} x=2=z \\ y=1 \end{array}\right\} \stackrel{b}{\Longrightarrow} 2*4 = 2\cdot(1*2) \Rightarrow 1*2 = \dfrac{3}{2}$.

$y=z=0 \stackrel{b}{\Longrightarrow} 0*0 = x\cdot(0*0)$, $\forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow 0*0=0$.

$y=z=0 \stackrel{c}{\Longrightarrow} x*x = x+(0*0) \Rightarrow x*x=x$.

Prin urmare $2*2=2$.

$$\left.\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{4} \\ y=1 \\ z=2 \end{array}\right\} \xRightarrow{b} \frac{1}{4}*\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\cdot(1*2) \Rightarrow \frac{1}{4}*\frac{1}{2}=\frac{3}{8}.$$

$$ii)\ 1*2=(1+0)*(1+1) \overset{c)}{=} 1+(0*1) \Rightarrow 0*1=\frac{1}{2}.$$

$$\left.\begin{array}{l} y=0 \\ z=1 \end{array}\right\} \xRightarrow{b} 0*x=x\cdot(0*1) \Rightarrow 0*x=\frac{x}{2},\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

$$y=0 \xRightarrow{c)} x*(x+z)=x+(0*z) \Rightarrow x*(x+z) \overset{(1)}{=} x+\frac{z}{2}.$$

$$x*t=x*(x+(t-x)) \overset{(1)}{=} x+\frac{t-x}{2}=\frac{x+t}{2}.$$

Deci $x*t=\dfrac{x+t}{2}$, $\forall x,t\in\mathbb{R}$.

Din $a*b=2009$, obţinem $a+b=4018$, $a,b\in\mathbb{N}^*$, deci avem 4017 perechi cu proprietatea cerută.

Nota redacţiei. În enunţul iniţial al acestei probleme lipseşte condiţia c), fapt pentru care ne cerem scuze.

5. *Se consideră o funcţie continuă* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *pentru care*

$$f(2x-1)+f(1-x)\geq x+2,\ \forall x\in\mathbb{R} \quad \text{şi} \quad \int_0^1 f(x)dx=\frac{3}{2}.$$

Să se determine cel mai mare număr întreg k *pentru care* $\displaystyle\int_{-1}^0 f(x)dx\geq k$.

(*Lucian Dragomir, Oţelu Roşu*)

Soluţie. Integrăm inegalitatea din ipoteză:

$$\int_0^1 f(2x-1)dx+\int_0^1 f(1-x)dx\geq\int_0^1(x+2)dx=\frac{5}{2}.$$

Dar $\displaystyle\int_0^1 f(1-x)dx=\int_0^1 f(x)dx=\frac{3}{2}$. Atunci $\displaystyle\int_0^1 f(2x-1)dx\geq 1$.

Facem schimbarea de variabilă $2x-1=y$ şi obţinem $\displaystyle\int_{-1}^1 f(y)dy\geq 2$.

Deci $\displaystyle\int_{-1}^0 f(y)dy+\int_0^1 f(y)dy\geq 2$ şi din ipoteză rezultă $\displaystyle\int_{-1}^0 f(y)dy\geq\frac{1}{2}$. Numărul maxim căutat este $k=0$.

6. *Să se calculeze* $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{(1+x\operatorname{arctg} x)^2}\,dx$*, pentru* $x>0$.

(*Vasile Giurgi, Colegiul Naţional "Dragoş Vodă" Sighetu Marmaţiei*)

Soluţie. Facem substituţia $\operatorname{arctg} x = t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Atunci $dx = \frac{1}{\cos^2 t}dt$ şi integrala asociată devine

$$
\begin{aligned}
I' &= \int \frac{t^2}{(1+t\operatorname{tg} t)^2}\cdot\frac{1}{\cos^2 t}\,dt = \int \frac{t^2}{(cost+t\sin t)^2}\,dt\\
&= -\int \frac{t}{\cos t}\cdot\frac{-t\cos t}{(\cos t+t\sin t)}\,dt = -\int \frac{t}{\cos t}\left(\frac{1}{\cos t+t\sin t}\right)'dt\\
&= -\frac{t}{\cos t}\cdot\frac{1}{\cos t+t\sin t}+\int\frac{1}{\cos^2 t}\,dt\\
&= -\frac{t}{\cos t}+\frac{1}{\cos t+t\sin t}+\operatorname{tg} t+\mathcal{C}.
\end{aligned}
$$

Deoarece $\sin t = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $\cos t = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, obţinem

$$I = x - \frac{(x^2+1)\operatorname{arctg} x}{1+x\operatorname{arctg} x}+\mathcal{C}.$$

7. *Fie grupul* $(G,\cdot)$ *cu cel puţin trei elemente. Dacă există endomorfismul surjectiv* $f:G\to G$*, astfel încât* $\forall\, x,y\in G\backslash\{e\}$, $x\neq y$, $f(x\cdot f(y)) = f(y\cdot f(x))$*, să se demnstreze că grupul este abelian.*

(*Dana Heuberger*)

Soluţie. Fie $a,b\in G\backslash\{e\}$, $a\neq b$. Din surjectivitatea funcţiei f rezultă că există $x,y\in G\backslash\{e\}$, $x\neq y$ cu $f(x)=a$ şi $f(y)=b$. Relaţia din ipoteză devine $f(x\cdot b) = f(y\cdot a)$. Deoarece f este morfism, obţinem:

$$af(b) = bf(a),\quad \forall\, a,b\in G\backslash\{e\},\ a\neq b. \tag{1}$$

Cazul 1. $a^2\neq e$. Din (1) obţinem succesiv:

$$af(a^2) = a^2f(a) \Rightarrow f(a)f(a) = af(a) \Rightarrow f(a) = a.$$

Cazul 2. $a^2 = e$. Există $c\in G\backslash\{e\}$, $c\neq a$. Din (1) obţinem:

$$af(ac) = acf(a) \Rightarrow f(a)f(c) = cf(a) \overset{(1)}{=} af(c).$$

Deci $f(a)f(c) = af(c) \Rightarrow f(a) = a$.
Analog rezultă că $f(b) = b$. Din (1) rezultă că $ab = ba$, $\forall\, a, b \in G\backslash\{e\}$, $a \neq b$.
Obţinem că $ab = ba$, $\forall\, a, b \in G$.

8. *Se consideră $a, b, c \in \mathbb{R}$, cu $a + b + c \notin \{-1, 0\}$, triunghiul ABC şi funcţia $f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$, $f(M) = Q$, unde $\overrightarrow{QM} = a \cdot \overrightarrow{MA} + b \cdot \overrightarrow{MB} + c \cdot \overrightarrow{MC}$.*
a) Să se demonstreze că f este bijectivă.
b) Dacă pentru $n \in \mathbb{N}^*$ notăm $f_n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{de\ n\ ori\ f}$ şi

$$G = \{f_n \,|\, n \in \mathbb{N}^*\} \cup \left\{f_n^{-1} \,|\, n \in \mathbb{N}^*\right\} \cup \{1_{\mathcal{P}}\},$$

să se demonstreze că $G, \circ)$ este un grup cu toate elementele din $G\backslash\{1_{\mathcal{P}}\}$ de ordin infinit.

(*Dana Heuberger*)

Soluţie. Notăm $\overrightarrow{r_M}$ vectorul de poziţie al punctului M.
Din $\overrightarrow{QM} = a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC}$, obţinem:

$$\overrightarrow{r_M} - \overrightarrow{r_Q} = a(\overrightarrow{r_A} - \overrightarrow{r_M}) + b(\overrightarrow{r_B} - \overrightarrow{r_M}) + c(\overrightarrow{r_C} - \overrightarrow{r_M}).$$

Atunci

$$\overrightarrow{r_Q} = (1 + a + b + c)\overrightarrow{r_M} - (a\overrightarrow{r_A} + b\overrightarrow{r_B} + c\overrightarrow{r_C}).$$

Notăm $\alpha = 1 + a + b + c \neq 0$; $\overrightarrow{u} = a\overrightarrow{r_A} + b\overrightarrow{r_B} + c\overrightarrow{r_C}$. Din $f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$, $f(M) = Q$ rezultă

$$(*) \qquad \overrightarrow{r_Q} = \alpha\overrightarrow{r_M} - \overrightarrow{u}.$$

Injectivitatea. Din $f(M_1) = f(M_2) \Rightarrow \alpha\overrightarrow{r_{M_1}} - \overrightarrow{u} = \alpha\overrightarrow{r_{M_2}} - \overrightarrow{u} \overset{\alpha\neq 0}{\Longrightarrow} \overrightarrow{r_{M_1}} = \overrightarrow{r_{M_2}}$, deci $M_1 = M_2$.

Surjectivitatea. Arătăm că pentru orice punct $Q \in \mathcal{P}$, există $M \in \mathcal{P}$ astfel încât $f(M) = Q$. Din $f(M) = Q$, rezultă $\overrightarrow{r_Q} = \alpha\overrightarrow{r_M} - \overrightarrow{u}$. Cum $\alpha \neq 0$, există $\overrightarrow{r_M} = \dfrac{1}{\alpha}(\overrightarrow{r_Q} + \overrightarrow{u})$.

b) Se verifică uşor că $(G, \circ)$ este grup. Arătăm că toate elementele din $G\backslash\{1_{\mathcal{P}}\}$ au ordin infinit.

Fie $f_n \in G\backslash\{1_p\}$. Determinăm punctele fixe ale lui f_n, adică căutăm $M \in \mathcal{P}$ astfel încât $f_n(M) = M$. Avem $f_1(M) = f(M) = M_1$; $f_2(M) = f(f(M)) = f(M_1) = M_2$ şi în general $f_k(M) = f(M_{k-1}) = M_k$, $k = \overline{1, n}$.

Notăm $\overrightarrow{r_k} = \overrightarrow{r_{M_k}}$, $k = \overline{1,n}$. Din $(*)$ obţinem succesiv:

$$\begin{array}{lll|l}
(1) & & \overrightarrow{r_1} = \alpha\overrightarrow{r_M} - \overrightarrow{u} & \alpha^{n-1} \\
(2) & & \overrightarrow{r_2} = \alpha\overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{u} & \alpha^{n-2} \\
 & & \vdots & \\
(n-2) & & \overrightarrow{r_{n-2}} = \alpha\overrightarrow{r_{n-3}} - \overrightarrow{u} & \alpha^{2} \\
(n-1) & & \overrightarrow{r_{n-1}} = \alpha\overrightarrow{r_{n-2}} - \overrightarrow{u} & \alpha^{1} \\
(n) & & \overrightarrow{r_m} = \overrightarrow{r_n} = \alpha\overrightarrow{r_{n-1}} - \overrightarrow{u} &
\end{array}$$

Înmulţim relaţia (i) cu α^{n-i}, $i = \overline{1,n}$, iar relaţiile obţinute le adunăm. Obţinem:

$$\overrightarrow{r_M} = \alpha^n \cdot \overrightarrow{r_M} - (1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{n-1})\overrightarrow{u} \Rightarrow (\alpha^n - 1)\overrightarrow{r_M} = \frac{\alpha^n - 1}{\alpha - 1}\overrightarrow{u},$$

pentru $\alpha \neq 1$, adică $\overrightarrow{r_M} = \dfrac{1}{\alpha - 1}\overrightarrow{u} = \dfrac{a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC}}{a + b + c}$, un unic vector de poziţie. Prin urmare, f_n are un singur punct fix M.

Presupunem că există $f_k \in G \backslash \{1_{\mathcal{P}}\}$, $k \in M^*$, astfel încât $\text{ord}\,(f_k) = m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$. Atunci $(f_k)^m = 1_{\mathcal{P}}$, adică $f_k \circ f_k \circ \cdots \circ f_k = 1_{\mathcal{P}} \Leftrightarrow f_{mk} = 1_{\mathcal{P}}$, deci f_{mk} are o infinitate de puncte fixe. Fals! Prin urmare presupunerea făcută este falsă, deci toate elementele lui $G \backslash \{1_{\mathcal{P}}\}$ au ordin infinit.

9. *Fie $n \in Z$, $a < b$ şi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă, impară şi periodică de perioadă $T = a + b$. Să se calculeze integrala: $I = \displaystyle\int_a^b f(f(x) + n \cdot x)dx$.*

(Ludovic Longaver, Liceul "Németh Laszlo")

Soluţie. Facem substituţia $x = a + b - t$ şi obţinem

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b f(f(x) + n \cdot x)dx = -\int_b^a f(f(T - t) + n(T - t))dt \\ &= \int_a^b f(f(-t) - nt)dt = -\int_a^b f(f(t) + nt)dt = -I. \end{aligned}$$

Deci $I = 0$.

10. *Fie $n \in \mathbb{N}^*$ $n|24$ şi $a_k \in \{p^2 \,|\, p$ număr prim, $p > 3\}$, $k = \overline{1,n}$. Să se arate că $\sum\limits_{k=1}^{n} \widehat{a}_k = \widehat{0}$, în mulţimea $\mathbb{Z}_n$.*

(Ludovic Longaver, Liceul "Németh Laszlo")

Soluţie. Se cunoaşte că pătratul unui număr prim mai mare ca trei este de forma $24 \cdot q + 1$, $q \in \mathbb{N}^*$. Atunci $a_k = 24 \cdot q_k + 1$, $q_k \in \mathbb{N}^*$, $k = \overline{1,n}$ şi $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = 24 \sum\limits_{k=1}^{n} q_k + n$. Cum $n/24$, deducem că $n/ \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$.

11. *Câte polinoame de gradul trei $f \in \mathbb{Z}_4[X]$ sunt reductibile în $\mathbb{Z}_4[X]$ şi nu au rădăcini în $\mathbb{Z}_4$?*

(*Dorel Miheţ, Timişoara*)

Soluţie. Se verifică că polinoamele de gradul I cu coeficientul lui X inversabil au rădăcini în $\mathbb{Z}_4$. Atunci polinoamele de gradul întâi fără rădăcini în $\mathbb{Z}_4$ sunt

$$\widehat{2}X + \widehat{1} \quad \text{şi} \quad \widehat{2}X + \widehat{3}. \tag{1}$$

Se constată că vom obţine polinoame de gradul trei reductibile în $\mathbb{Z}_4[X]$ şi care nu au rădăcini în $\mathbb{Z}_4$ dacă înmulţim polinoamele din (1) cu polinoamele de gradul doi cu coeficientul dominant inversabil şi care nu au rădăcini în $\mathbb{Z}_4$. Acestea sunt:

$$X^2 + \widehat{1},\ X^2 + \widehat{2},\ X^2 + X + \widehat{1},\ X^2 + X + \widehat{3},\ X^2 + \widehat{2}X + \widehat{2};$$
$$\widehat{3}X^2 + \widehat{2},\ \widehat{3}X^2 + X + \widehat{1},\ \widehat{3}X^2 + X + \widehat{3},\ \widehat{3}X^2 + \widehat{2}X + \widehat{1},\ \widehat{3}X^2 + \widehat{2}X + \widehat{2},$$

deci 10 polinoame. Obţinem $2 \cdot 10 = 20$ polinoame cu proprietăţile cerute.

12. *Să se arate că* $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_0^1 e^x \{nx\} dx = \frac{e-1}{2}$.

(*Nicolae Muşuroia*)

Soluţie. $\displaystyle\int_0^1 e^x \{nx\} dx \overset{nx=t}{=} \frac{1}{n}\int_0^1 e^{\frac{t}{n}}\{t\}dt = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int_{k-1}^{k} e^{\frac{t}{n}}\{t\}dt \overset{y=t-(k-1)}{=}$
$\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int_0^1 e^{\frac{y+k-1}{n}}\{y+(k-1)\}dy = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int_0^1 e^{\frac{y}{n}} \cdot e^{\frac{k-1}{n}} \cdot y dy = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{\frac{k-1}{n}} \int_0^1 e^{\frac{y}{n}} y dy.$
Dar

$$\int_0^1 e^{\frac{y}{n}} y dy = n \int_0^1 \left(e^{\frac{y}{n}}\right)' y dy = n\left[e^{\frac{1}{n}} - n\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)\right],$$

iar $\sum\limits_{k=1}^{n} e^{\frac{k-1}{n}} = \dfrac{1-e}{1-e^{\frac{1}{n}}}$. Atunci:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_0^1 e^x\{nx\}dx &= \lim_{n\to\infty}\left[e^{\frac{1}{n}} - n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)\right]\frac{1-e}{1-e^{\frac{1}{n}}}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}} - \frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}}(e-1)\frac{\frac{1}{n}}{e^{\frac{1}{n}}-1} = \frac{e-1}{2}.\end{aligned}$$

13. *Fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ integrabilă, astfel încât $\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{k-1}{n}\right) = \dfrac{1}{\sqrt[n]{2}-1}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Să se demonstreze că $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{\ln 2}$, iar dacă în plus f este derivabilă cu derivata continuă, atunci $f(1) - f(0) = 1$.*

(*Cristinel Mortici, Târgovişte*)

Soluţie. Funcţia f fiind integrabilă pe $[0,1]$, avem:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k-1}{n}\right) = \int_0^1 f(x)dx. \tag{1}$$

Atunci

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k-1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt[n]{2}-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{2^{\frac{1}{n}}-1} = \frac{1}{\ln 2}.$$

Din(1) rezultă că $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{\ln 2}$.

Se ştie că dacă funcţia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ este derivabilă cu derivata continuă pe $[0,1]$, atunci:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k-1}{n}\right)\right) = \frac{f(1)-f(0)}{2}.$$

Atunci

$$\frac{f(1)-f(0)}{2} = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt[n]{2}-1}\right) = \frac{1}{2},$$

deoarece
$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\ln 2}-\frac{x}{2^x-1}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{2^x-x\ln 2-1}{(2^x-1)\ln 2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{2^x-1}\cdot\frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{2^x-x\ln 2-1}{x^2}$$
$$=\frac{1}{\ln^2 2}\lim_{x\to 0}\frac{2^x-x\ln 2-1}{x^2}\overset{\text{L'Hospital}}{=}\frac{1}{\ln^2 2}\lim_{x\to 0}\frac{2^x\ln 2-\ln 2}{2x}=\frac{1}{2}.$$
Obţinem: $f(1)-f(0)=1$.
Observaţie. Funcţia $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=2^x$ constituie un exemplu de funcţie care verifică condiţiile din problemă.

14. *Să se determine funcţia continuă* $f:[0,\pi]\to\mathbb{R}$, *astfel încât*
$$\begin{cases} f(x)\le \sin x, & x\in\mathbb{R}\\ \int_0^\pi f(x)dx=2.\end{cases}$$
(*Nicolae Muşuroia*)

Soluţie. Considerăm funcţia $g:[0,\pi]\to\mathbb{R}$, $g(x)=F(x)+\cos(x)$. Atunci $g'(x)=f(x)-\sin x\le 0$, $x\in[0,\pi]$, deci g este funcţie descrescătoare. Cum
$$g(\pi)-g(0)=F(\pi)-1-(F(0)+1)=F(\pi)-F(0)-2=\int_0^\pi f(x)dx-2=0,$$
obţinem că g este funcţie constantă pe $[0,\pi]$. Deci există $c\in\mathbb{R}$ astfel încât $F(x)+\cos x=c$, $x\in[0,\pi]$. Derivând obţinem $f(x)=\sin x$, $x\in[0,\pi]$.

15. *Să se determine funcţia continuă* $f:[0,\pi]\to\mathbb{R}$, *pentru care*
$$\int_0^\pi f(x)(2\sin x-f(x))dx=\frac{\pi}{2}.$$
(*Nicolae Muşuroia*)

Soluţie. Relaţia dată devine: $\int_0^\pi f(x)(2\sin x-f(x))dx=\int_0^\pi \sin^2 x\,dx$. Atunci:
$$\int_0^\pi(\sin^2 x-2\sin x\, f(x)+f^2(x))dx=0,$$
adică $\int_0^\pi(\sin x-f(x))^2dx=0$. Cum f este o funcţie continuă, obţinem că $f(x)=\sin x$, $x\in[0,\pi]$.

Probleme propuse

Clasa a IX-a

1. Dacă $x, y, z > 0$, atunci:

$$\frac{x}{x^2+yz}+\frac{y}{y^2+zx}+\frac{z}{z^2+xy}\leq\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right).$$

(*D. M. Bătineţu-Giurgiu*)

2. Fiecărui punct din plan îi este asociat un număr real, astfel încât pentru orice triunghi, numărul asociat ortocentrului acestuia este egal cu numărul asociat centrului cercului circumscris. Să se arate că fiecărui punct din plan i s-a asociat acelaşi număr real.

(*Gheorghe Boroica*)

3. Determinaţi toate numerele prime p pentru care numărul 2^p+p^4 este de asemenea un număr prim.

(*Gheorghe Boroica*)

4. Se consideră $n\in\mathbb{N}^*$, $n\geq 2$ şi numerele $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (0,\infty)$ astfel încât $x_1\cdot x_2\ldots x_n\geq 1$. Să se arate că

$$\frac{x_1^2}{x_2+x_3+\cdots+x_n+1}+\frac{x_2^2}{x_1+x_3+\cdots+x_n+1}+\ldots+\frac{x_n^2}{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}+1}\geq 1.$$

(Generalizare a problemei O:1172 din G.M. 10/2007,
autor D. M. Bătineţu-Giurgiu)
(*Gheorghe Boroica*)

5. Se consideră ecuaţia $ax^2+bx+c=0$, $a,b,c\in\mathbb{R}^*$ cu rădăcinile x_1 şi x_2. Dacă $x_1\in\mathbb{Q}$ şi $x_2\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, să se arate că cel puţin două dintre numerele a,b,c sunt iraţionale.

(*Florin Bojor*)

6. Să se arate că dacă a, b, c sunt numere reale, nu toate egale, atunci există două valori ale parametrului $m \in \mathbb{R}$, astfel încât ecuaţia

$$(a+m)x^2 + (b+m)x + (c+m) = 0$$

să aibă rădăcinile egale.

(*Gheorghe Fătu*, C. N. "Gheorghe Şincai")

7. a) Se consideră triunghiul ascuţitunghic ABC, punctele $D \in BC$, $E \in AC$ şi $F \in AB$ astfel încât $AD \perp AC$, $BE \perp AB$, $CF \perp BC$ şi $\{A'\} = BC \cap EF$, $\{B'\} = AC \cap DF$ şi $\{C'\} = AB \cap DE$. Să se demonstreze că

$$\frac{A'F}{A'E} \cdot \frac{B'D}{B'F} \cdot \frac{C'E}{C'D} \geq 8.$$

b) Se consideră triunghiul echilateral DEF. Să se demonstreze că există un unic triunghi ascuţitunghic ABC situat în interiorul triunghiului DEF, astfel încât $AD \perp AC$, $BE \perp AB$ şi $CF \perp BC$.

(*Dana Heuberger*)

8. Se consideră $n, k \in \mathbb{N}$, $3 \leq k \leq n$ şi mulţimea $V_n = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_n}\}$ cu elementele vectori distincţi, care au aceeaşi origine şi extremităţile coliniare, astfel încât oricare ar fi k vectori din V_n, există printre aceştia cel puţin o pereche de vectori care au acelaşi modul.

a) Pentru $k = 5$, să se demonstreze că $n \in \{5, 6, 7, 8\}$.

b) Pentru $k = 5$, să se determine numărul mulţimilor V_6.

c) Să se determine numărul minim şi numărul maxim al perechilor de vectori cu modulele egale.

(*Dana Heuberger*)

9. Pe laturile AB, AC, BC ale triunghiului ascuţitunghic ABC se consideră punctele B', C' şi A_1 astfel ca triunghiul $B'A_1C'$ să fie dreptunghic isoscel şi ipotenuza $B'C'$ că fie paralelă cu BC. Analog se definesc punctele $B_1 \in AC$ şi $C_1 \in AB$. Să se arate că dreptele AA_1, BB_1, CC_1 sunt concurente.

(*Conf. dr. Vasile Pop*, Univ. Tehnică Cluj-Napoca)

10. Fie paralelogramul $ABCD$ şi punctul $M \in AB$, $\overrightarrow{AM} = k \cdot \overrightarrow{MB}$, $k > 0$. Dreptele MC şi MD intersectează diagonalele BD şi AC în punctele N, respectiv P. Dacă O este centrul paralelogramului, să se exprime aria patrulaterului $MNOP$ în funcţie de k şi de aria S a paralelogramului.

(*Ludovic Longaver*, Liceul "Németh László")

11. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{5x-3}{5-3x}} = \dfrac{5y^2+3}{3y^2+5} \\ \sqrt{\dfrac{5y-3}{5-3y}} = \dfrac{5z^2+3}{3z^2+5} \\ \sqrt{\dfrac{5z-3}{5-3z}} = \dfrac{5x^2+3}{3x^2+5} \end{cases}$$

(*Nicolae Muşuroia*)

12. Se consideră patrulaterul convex $ABCD$ de arie S, ale cărui diagonale formează un unghi de măsură α. Dacă M este mijlocul laturii $[CD]$, să se calculeze aria triunghiului $G_1G_2G_3$, unde G_1, G_2, G_3 sunt centrele de greutate ale triunghiurilor MAD, MAB, respectiv MBC.

(*Nicolae Muşuroia*)

13. Se consideră un triunghi ABC, (AD bisectoare cu $D \in (BC)$ şi punctele $M \in (AB)$, $N \in (AC)$ cu $MN \cap AD = \{L\}$. Notăm $\dfrac{AL}{AD} = \lambda$.

a) Să se arate că $\dfrac{1}{AM} + \dfrac{1}{AN} = \dfrac{1}{\lambda}\left(\dfrac{1}{AB} + \dfrac{1}{AC}\right)$.

b) Să se arate că dacă I este centrul cercului înscris în triunghiul ABC, iar punctele M, I, N sunt coliniare, atunci $\dfrac{1}{AM} + \dfrac{1}{AN} = \dfrac{AB+BC+CA}{AB \cdot AC}$.

(*Nicolae Muşuroia*)

14. Să se arate că:

$$\sqrt{a^3+1^3} + \sqrt{a^3+2^3} + \cdots + \sqrt{a^3+2009^3} \leq 2009\sqrt{a^3+2009\cdot 1005^2}\,,\ \forall\, a \in \mathbb{N}.$$

(*Crina Petruţiu*)

15. Fie patrulaterul circumscriptibil $ABCD$, I, r centrul, respectiv raza cercului înscris în patrulater, iar S semipaerimetrul patrulaterului. Să se arate că:

$$4r\sqrt{2} \leq \frac{(4r+s)\sqrt{2}}{2} \leq IA + IB + IC + ID.$$

Argument 12

(*Ovidiu Pop şi Nicuşor Minculete*, C. N. "Mihai Eminescu" Satu Mare)

Clasa a X-a

1. Să se rezolve ecuaţia:

$$\sqrt{1-\sqrt{x-2}}+2=\sqrt{x+1}.$$

(*Gheorghe Fătu*, C. N. "Gheorghe Şincai")

2. Să se arate că dacă $a_1, a_2, a_3, a_4 \in (1,\infty)$, atunci

$$\log \frac{a_1+a_3}{2} \log_{a_3} \frac{a_2+a_4}{2} \log_{a_4} \frac{a_3+a_1}{2} \log_{a_1} \frac{a_4+a_2}{2} =\geq 1.$$

(*Crina Petruţiu*)

3. Să se determine numerele $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (1,\infty)$ pentru care

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n = 8 \\ \log_{x_1} 2 + \log_{x_2} 2 + \cdots + \log_{x_n} 2 = 3. \end{cases}$$

(*Ludovic Longaver*, Liceul "Németh László")

4. Să se rezolve ecuaţia

$$2^{x^2+1}+\log_2 x = 2^{x+\frac{1}{x}}, \quad x>0.$$

(*Gheorghe Gherasin*, Liceul "Regele Ferdinand" Sighetu Marmaţiei)

5. În câte moduri putem alege patru numere din mulţimea $X=\{1,2,3,4,\ldots,4n\}$, $n\in\mathbb{N}^*$, astfel încât suma lor să fie divizibilă prin 4.

(*Gheorghe Boroica*)

6. Fie $a,b,c,d \in (0,\infty)$ cu $abcd=1$. Să se arate că:

$$\frac{a^n}{1+a+ab+abc}+\frac{b^n}{1+b+bc+bcd}+\frac{c^n}{1+c+cd+cda}+\frac{d^n}{1+d+da+dab}\geq 1, \quad \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

(*Gheorghe Boroica*)

7. Se consideră triunghiul ABC şi punctele distincte $M, N \in (BC)$, $P, Q \in (CA)$, astfel încât $\frac{BM}{MC} = \frac{CP}{PA} = k$ şi $\frac{BN}{NC} = \frac{CQ}{QA} = t$, cu $k \neq t$. Să se arate că $\triangle AMN \sim \triangle BPQ \Leftrightarrow \triangle ABC$ este echilateral.

(*Dana Heuberger*)

8. Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ astfel încât $\overline{z}_1 = z_2 + z_3$ şi $\overline{z}_2 = z_3 + z_1$. Să se arate că $Re\, z_1 = Re\, z_2$ şi $Re\, z_3 = 0$.

(*Ovidiu Pop* , C. N. "Mihai Eminescu" Satu Mare)

9. Pe laturile AB, BC, CA ale triunghiului ABC se consideră punctele M, N, respectiv P, astfel încât $\frac{AM}{MB} = \frac{BN}{NC} = \frac{CP}{PA} = k \neq 1$. Pe segmentele (AN), (BP), (CM) se consideră punctele E, F, respectiv G, astfel încât $\frac{AE}{EN} = \frac{BF}{FP} = \frac{CG}{GM} = k + 1$. Să se demonstreze că triunghiurile ABC şi EFG sunt asemenea.

(*Florin Bojor*)

10. Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n \geq 1}$ cu $a_1 > 0$ şi raţia $r > 0$. Definim numerele complexe $z_k = (1 + a_k a_{k+1}) + ri$, $k = \overline{1, n}$. Să se arate că $Re\,(z_1 z_2 \ldots z_n) > 0$ şi $Im(z_1 z_2 \ldots z_n) > 0$.

(*Nicolae Muşuroia şi Ion Savu*)

11. Se consideră $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, $\varepsilon \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$, $\varepsilon^3 = 1$. Să se arate că dacă $|a + b\varepsilon + c\varepsilon^2| \leq |a|$, atunci ecuaţia $az^2 + bz + c = 0$ are cel puţin o soluţie z cu $|z| \leq 2$.

(*Nicolae Muşuroia*)

12. Se consideră triunghiul ascuţitunghic ABC cu afixele vârfurilor z_A, z_B, respectiv z_C. Să se arate că dacă $\sum \left| \frac{z_A + z_B}{z_A - z_B} \right| = \sqrt{3}$, atunci triunghiul ABC este echilateral.

(*Nicolae Muşuroia*)

13. Se consideră tetraedrul echifacial $ABCD$ cu $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, $AC = e$, $BD = f$. Să se arate că dacă

$$\frac{a+b+c+d}{e+f} \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{a+c+e+f}{b+d} \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{b+d+e+f}{a+c} \in \mathbb{N}^*,$$

atunci tetraedrul este regulat.

(*Nicolae Muşuroia*)

14. În tetraedrul $[ABCD]$ tridreptunghic în A notăm cu S_A aria feţei opuse a vârfului A şi analoagele S_B, S_C, S_D. Să se arate că

$$\frac{1}{mS_B^2 + nS_C^2} + \frac{4}{mS_C^2 + nS_D^2} + \frac{9}{mS_D^2 + nS_B^2} \geq \frac{36}{(m+n)S_A^2}, \quad \forall\, m, n \in (0, \infty).$$

(*D. M. Bătineţu-Giurgiu*)

15. În câte moduri putem ajunge în vârful unei scări ce are zece trepte, dacă putem urca una, sau doua, sau trei trepte o dată?

(*Gheorghe Boroica*)

Clasa a XI-a

1. Se consideră matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}$, unde $a_{ij} = (-1)^{i+j}(i+j)$, $\forall\, i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

a) Să se calculeze suma elementelor matricei A.

b) Să se calculeze $\det(A)$ şi $Tr(A^2)$.

(*Traian Covaciu*, Colegiul Economic "Nicolae Titulescu")

2. Să se arate că dacă $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ cu $Tr(A) = 0$, atunci

$$\sum_{k=0}^{2} \det(A^2 + \varepsilon_k \cdot A + \varepsilon_k^2 \cdot I_2) = 3\det{}^2(A),$$

unde $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ sunt rădăcinile de ordinul trei ale unităţii.

(*Nicolae Muşuroia*)

3. Se consideră $n \in \mathbb{N}^*$ şi $M = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \,|\, A^3 + 4A - I_n = O_n\}$. Să se arate că:

a) $M \neq \emptyset$;

b) dacă $A \in M$, atunci $\det(I_n + \alpha A) > 0$, $\forall\, \alpha \geq -4$.

(*Gheorghe Boroica*)

4. Se consideră cunoscută convergenţa către $s = -1,4553...$ a şirului lui A. G. Ioachimescu, $(s_n)_{n\geq 1}$, $s_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$. Demonstraţi că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin relaţia $s = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - x_n \cdot \sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, este convergent şi calculaţi apoi $\lim\limits_{n\to\infty}(1 + x_n - x)^n$, unde $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

(*D. M. Bătineţu-Giurgiu*)

5. Fie $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ două funcţii continue, bijective, cu proprietatea că $f(x) + g(x) = 2$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Să se arate că există un singur $x_0 \in \mathbb{R}$ astfel încât $(f(x_0))^n + (g(x_0))^n = 2$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

(*Gheorghe Fătu*, C. N. "Gheorghe Şincai")

6. Se consideră şirul $(x_n)_{n\geq 0}$, unde $x_0 \in [-1, \infty)$ şi $x_{n+1} = \sqrt{x_n + 10} - \sqrt{x_n + 17}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Să se demonstreze că şirul este convergent şi calculaţi limita sa.

(*Margareta Trif*, Colegiul Economic "Nicolae Titulescu")

7. Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir definit prin $x_0 \in \mathbb{R}$ şi $x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2}\ln(1 + e^{2x_n})$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

a) Determinaţi termenul general al şirului.

b) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

(*Eliza Mastan şi Ludovic Longaver*, Liceul "Németh László")

8. Fie $0 < a < b$. Să se studieze convergenţa şirului $(x_n)_{n\geq 0}$ pentru care $a < x_n < b$ şi $\frac{1}{x_n - a} - \frac{1}{x_{n+1} - b} \leq \frac{4}{b - a}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Să se calculeze limita acestui şir în cazul în care aceasta există.

(*Ludovic Longaver*, Liceul "Németh László")

9. Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ cu $a_1 = \sqrt{2}$ şi $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$. Să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty} 4^n \left(\left(\frac{a_n}{2} \right)^{4^n} - e^{-\frac{\pi^2}{8}} \right).$$

(*Nicolae Muşuroia*)

10. Să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty} \left(e^{\frac{1}{n+2}\sum\limits_{k=1}^{n+1} H_k} - e^{\frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=1}^{n} H_k} \right)$$

unde $H_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

(*Nicolae Muşuroia*)

11. Calculaţi

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n-1}} \right) \right).$$

(*Cristian Heuberger*)

12. Determinaţi funcţiile derivabile $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ astfel încât pentru orice $x > 0$ să aibă loc egalitatea $\left(\dfrac{1}{x} f(x) \right)' = \dfrac{1}{x^2}\left(1 + f\left(\dfrac{1}{x} \right) \right)$.

(*Cristian Heuberger*)

13. Să se determine funcţiile derivabile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifică relaţia:

$$f(x+y) = e^{5x} f(y) + e^{2y} f(x), \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}.$$

(*Gheorghe Boroica*)

14. Fie $a \in (0,1)$ un număr real şi $a = 0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$, cu $a_1, a_2, \ldots, a_n \cdots \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$, reprezentarea sa zecimală.

a) Să se arate că pentru orice $x \in (0,1)$ există şi este finită limita

$$\lim_{n\to\infty} (a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n).$$

b) Dacă notăm $f_a(x) = \lim\limits_{n\to\infty} (a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n)$, $x \in (0,1)$, să se arate că funcţia $f_a : (0,1) \to \mathbb{R}$ este funcţie raţională dacă şi numai dacă numărul a este număr raţional.

(*Conf. dr. Vasile Pop*, Univ. Tehnică Cluj-Napoca)

15. *Fie a şi x_0 două numere reale strict pozitive. Considerăm şirurile $(a_n)_{n\geq 1}$ şi $(x_n)_{n\geq 1}$ pentru care*
1) $x_n - a_n = \sqrt{a}$ *oricare ar fi* $n \geq 1$;
2) $2x_n x_{n-1} = x_{n-1}^2 + a$ *pentru orice* $n \geq 1$.
Să se arate că:
1) *şirul* $(x_n)_{n\geq 1}$ *este convergent şi are limita* $\sqrt{a}$;
2) $2^{n-1}a_n \geq a$ *pentru orice* $n \geq 2$.

(*Lector dr. Andrei Horvat-Marc*, Univ. de Nord Baia Mare)

Clasa a XII-a

1. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ şi funcţiile continue $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că $f(a + b - x) = g(x)$, $\forall\, x \in [a, b]$. Să se calculeze $\displaystyle\int_a^b (f(x) - g(x))dx$.

(În legătură cu problema 12 pag. 90, Argument 7-2005)
(*D. M. Bătineţu-Giurgiu*)

2. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ şi funcţiile continue $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}_+^*$, $h : [a, b] \to \mathbb{R}$, astfel încât $f(a+b-x) = g(x)$, $\forall\, x \in [a, b]$ şi $h(a+b-x) = -h(x)$, $\forall\, x \in [a, b]$. Să se calculeze $\displaystyle\int_a^b \frac{(f(x))^{g(x)} + f(x) + h(x)}{(f(x))^{g(x)} + (g(x))^{f(x)} + f(x) + g(x)}dx$.

(O generalizare a problemei 4, pag. 88, Argument 7-2005)
(*D. M. Bătineţu-Giurgiu*)

3. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ şi funcţiile continue $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că $f(a + b - x) = f(x)$ şi $g(a + b - x) = -g(x)$, $\forall\, x \in [a, b]$. Să se arate că

$$\int_a^b \frac{f(x)}{1 + e^{g(x)}}\, dx = \frac{1}{2}\int_a^b f(x)dx.$$

(O generalizare a problemei 3, pag. 72, Argument 7-2005)
(*D. M. Bătineţu-Giurgiu*)

4. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, periodică şi neconstantă, iar $k \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că dacă funcţia f este derivabilă cu derivata continuă, atunci funcţia

$$g_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g_k(x) = \begin{cases} f'\left(\dfrac{1}{x^k}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

admite primitive.

(*Florin Bojor*)

5. Să se calculeze limita şirului $(a_n)_{n\geq 2}$,

$$a_n = \frac{\sqrt[n]{(n^3+1^3)(n^3+2^3)\cdot\ldots\cdot(n^3+n^3)}}{n^3}.$$

(*Gheorghe Boroica*)

6. Se consideră polinomul $P_n(X)$ definit prin $P_0(X) = 0$, $P_1(X) = 2$ şi $P_n(X) = 2X \cdot P_{n-1}(X) + (1 - X^2)P_{n-2}(X)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.
Să se afle rădăcinile polinomului P_n, unde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

(*Gheorghe Boroica*)

7. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că funcţiile $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ date prin $g(x) = (ax + b)f(x)$, $h(x) = x \cdot f(ax + b)$, $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a \neq -1$, admit primitive pe $\mathbb{R}$. Să se arate că funcţia f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

(*Ludovic Longaver*, Liceul "Németh László")

8. Se consideră funcţia continuă $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ pentru care există $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$. Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \int_n^{n+1} \sqrt{x} f(x)dx = l.$$

(*Nicolae Muşuroia*)

9. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifică relaţia $e^{f(x)} + f(x) = e^x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

a) Să se arate că f este o funcţie strict monotonă.

b) Să se calculeze $\displaystyle\int_0^{\ln(1+e)} e^x f(x)dx$.

(*Nicolae Muşuroia*)

10. Se consideră funcţia integrabilă $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ cu proprietatea

$$\frac{n}{m!} \leq f\left(\frac{m}{n}\right) \leq e^{\frac{m}{n}}, \text{ pentru orice } m, n \in \mathbb{N}^*, \ m \leq n.$$

Să se arate că $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = e - 1$.

(*Nicolae Muşuroia*)

11. Să se arate că dacă G este un grup multiplicativ cu elementul neutru e şi $g : G \to G$ este un morfism injectiv cu proprietatea că $g(x \cdot g(x)) = e$, $\forall\, x \in G$, atunci grupul G este abelian.

(*Lucian Dragomir*, Oţelul Roşu)

12. Se consideră şirul $(I_n)_{n\geq 1}$, unde $I_n = \displaystyle\int_0^1 \ln\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)dx$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se calculeze $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n \cdot I_n$.

b) Să se calculeze $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\left(n \cdot I_n - \frac{1}{3}\right)$.

(*Nicolae Muşuroia*)

13. Se consideră $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ şi funcţiile continue $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ astfel încât f este strict monotonă şi $g > 0$. Să se arate că pentru orice $t \in (a,b)$, există numerele distincte $c, d \in [a,b]$ cu proprietatea că

$$\int_c^d g(x)f(x)dx = f(t)\int_c^d g(x)dx,$$

unde G este o primitivă pentru g.

(*Gheorghe Boroica*)

14. Se consideră $n \in \mathbb{N}^*$ şi funcţiile $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât

$$g(x) = f(x) \cdot \sin^{2n-1} x \quad \text{şi} \quad h(x) = f(x) \cdot \cos^{2n-1} x, \ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Să se arate că dacă funcţiile g şi h sunt primitivabile pe $\mathbb{R}$, atunci şi f este primitivabilă pe $\mathbb{R}$.

(*Gheorghe Boroica*)

15. Să se determine funcţiile $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue şi descrescătoare care satisfac inegalitatea:

$$\int_0^1 xf(x^3 - 2x + 2)dx + 5\int_0^1 xf(x)dx = 3 + \int_0^1 f^2(x)dx.$$

(*Gheorghe Boroica*)

Erată

În numărul 11 al revistei s-au strecurat următoarele greşeli:

• pag. 124 – problema 13, subpunctul a): $A \cdot A^T = O_{m,n}$ devine $A \cdot A^T = O_m$.

• pag. 125, – problema 15: funcţii de grad cel mult doi, devine funcţii polinomiale de grad cel mult doi.

• pag. 126, – problema 4: lipseşte condiţia c):

$$(x+y) * (x+z) = x + (y * z), \quad \forall\, x, y, z \in \mathbb{R}.$$

• – problema 8: ordin finit devine ordin infinit.