COLEGIUL NAȚIONAL

GHEORGHE ȘINCAI
BAIA MARE

Concursul Interjudeţean de Matematică "Argument"
Ediţia a VII-a, 6–7 noiembrie 2015

Clasa a IX-a

Problema 1. O lăcustă face salturi, fiecare salt în linie dreaptă şi de două ori mai lung ca precedentul. Poate vreodată lăcusta să revină în punctul de plecare iniţial?

Problema 2. Să se determine numerele reale x cu proprietatea că trei dintre numerele

$$a = x + \sqrt{3},\ b = x + \frac{1}{x},\ c = x^2 + 4\sqrt{3},\ d = x - \frac{1}{x}$$

sunt numere întregi.

Problema 3. Fie a, b, c, d numere reale care verifică relaţiile:

$$ab + cd = 14, \quad ac + bd = 11, \quad ad + bc = 10, \quad abcd = 24.$$

Să se determine cea mai mare valoare pe care o poate lua a.

Problema 4. Fie ABC un triunghi cu înălţimile AA', BB', CC'. Să se arate că dacă

$$9\overrightarrow{AA'} + 13\overrightarrow{BB'} + 16\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{0}$$

atunci unul dintre unghiurile triunghiului este de $60°$.

Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7.

Timp de lucru: 3 ore.

Succes!

COLEGIUL NAȚIONAL

GHEORGHE ȘINCAI
BAIA MARE

Concursul Interjudeţean de Matematică “Argument”
Ediţia a VII-a, 6–7 noiembrie 2015

Clasa a X-a

Problema 1. Fie ABC un triunghi dreptunghic cu laturile $a > b > c$. Să se determine toate triunghiurile dreptunghice $A'B'C'$ cu laturile $a' > b' > c'$ astfel ca triunghiul cu laturile $a + a'$, $b + b'$, $c + c'$ să fie dreptunghic.

Problema 2. Fie x, y numere reale cu proprietatea:

$$x = y + \cfrac{1}{x + \cfrac{1}{y + \cfrac{1}{x + \cfrac{1}{\ddots}}}}, \qquad y = x - \cfrac{1}{y + \cfrac{1}{x - \cfrac{1}{y + \cfrac{1}{\ddots}}}}$$

(în ambele expresii apar o infinitate de fracţii).

Să se arate că $x \cdot y = 1$.

Problema 3. a) Să se arate că, pentru orice număr natural impar n, nu există funcţii $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifică ecuaţia:

$$f(f(x + y) - f(x - y)) = x^n y^n, \ \forall\ x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

b) Există numere naturale nenule n pentru care ecuaţia (1) are soluţii?

Problema 4. Se consideră o progresie aritmetică de numere reale $(a_n)_{n\geq 1}$ cu proprietatea că a_1^2, a_2^2 şi a_{2015}^2 sunt termeni ai progresiei. Să se arate că toţi termenii progresiei sunt numere întregi.

Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7.

Timp de lucru: 3 ore.

Succes!

COLEGIUL NAȚIONAL

GHEORGHE ȘINCAI

BAIA MARE

Concursul Interjudeţean de Matematică "Argument"
Ediţia a VII-a, 6–7 noiembrie 2015

Clasa a XI-a

Problema 1. Să se determine numărul secvenţelor $(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{16})$ de numere naturale având proprietăţile

$$x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{16}$$

$$x_{16} = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 4^4 \cdot 5^5$$

şi astfel încât $\dfrac{x_{k+1}}{x_k}$ să fie număr prim pentru orice $k = 0, 1, 2, \ldots, 15$.

Problema 2. Fie a un număr natural nenul şi funcţia

$$f_a : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*, \ f_a(n) = an + (a, n) + [a, n], \ \forall\ n \geq 1.$$

a) Să se arate că funcţia f_a este injectivă pentru orice $a \in \mathbb{N}^*$.

b) Să se arate că $f_a(n) \neq 100$ pentru orice $a \in \mathbb{N}^*$ şi orice $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Să se determine valorile lui a pentru care există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel ca

$$f_a(n) = 99.$$

Problema 3. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Să se determine matricele $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}_+)$ cu proprietatea că $A \cdot A^T = I_n$.

Problema 4. a). Să se determine mulţimea $X_0 \subseteq \mathbb{R}$ pentru care putem defini şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ prin relaţia de recurenţă

$$x_{n+1} = \frac{1}{x_n + 1}, \quad \text{pentru orice } n \geq 0,$$

unde $x_0 \in X_0$.

b). Să se studieze monotonia şi mărginirea şirului $(x_n)_{n\geq 0}$ definit la punctul a), în funcţie de $x_0 \in X_0$.

Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7.

Timp de lucru: 3 ore.

Succes!

COLEGIUL NAŢIONAL
GHEORGHE ŞINCAI
BAIA MARE

Concursul Interjudeţean de Matematică "Argument"
Ediţia a VII-a, 6–7 noiembrie 2015

Clasa a XII-a

Problema 1. Să se determine funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care admit primitivă $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ şi verifică relaţia:

$$f(x-y) = \frac{F(x)}{F(y)}, \ \forall\, x, y \in \mathbb{R}.$$

Problema 2. Să se determine numărul matricelor $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_p)$ cu proprietatea $A^2 = I_2$, unde p este un număr prim.

Problema 3. Să se determine funcţiile continue $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$ care verifică relaţia:

$$(1+x^2)f(x^2) = f(x), \ \forall\, x \in (-1,1).$$

Problema 4. a). Fie A o mulţime cu cel puţin două elemente şi $* : A \times A \to A$ o lege de compoziţie asociativă şi comutativă.

Să se arate că dacă ecuaţia $a * x = b$ are soluţie $x \in A$ pentru orice $a, b \in A$, atunci funcţia

$$f_c : A \to A, \quad f_c(x) = c * x, \quad x \in A$$

este injectivă pentru orice $c \in A$.

b). Fie $g : A \to A$ o funcţie bijectivă cu proprietatea că $g(x) \neq x$ pentru orice $x \in A$ şi legea de compoziţie

$$\text{“} \circ \text{”} : A \times A \to A, \quad x \circ y = g(y) \quad (x, y \in A).$$

Să se arate că legea "$\circ$" nu este asociativă şi nu este comutativă, că ecuaţia $a \circ x = b$ are soluţie $x \in A$ pentru orice $a, b \in A$ şi că pentru orice $c \in A$ funcţia

$$g_c : A \to A, \quad g_c(x) = c \circ x, \quad x \in A$$

este injectivă.

Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7.

Timp de lucru: 3 ore.

Succes!