COLEGIUL NAȚIONAL
GHEORGHE ȘINCAI
BAIA MARE

Concursul Interjudeţean de Matematică “Argument”
Colegiul Naţional “Gheorghe Şincai” Baia-Mare, Ediţia a IX-a, 2017

Clasa a XII-a

Problema 1. Să se determine funcţiile continue $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, cu primitiva $F : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, care verifică relaţia

$$(1) \qquad F(x) \cdot f(\frac{1}{x}) = \frac{x}{2}, \forall x \in (0, \infty), \quad f(1) = 2.$$

Problema 2. Fie $f \in \mathbb{R}[X]$ un polinom de grad $n - 1$ cu proprietatea

$$f(k) = \frac{1}{k}, \ k = 1, 2, \ldots, n.$$

Să se determine $f(n + 1)$.

Problema 3. Pentru fiecare matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definim multimea ;
$G(A) = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) | det(A + X) = detA + detX\}$
a) Sa se arate ca $(G(A), +)$ este grup.
b) Sa se arate ca daca $A \neq 0$ si $B \neq 0$ atunci grupurile $(G(A), +)$ si $(G(B), +)$ sunt izomorfe.

Problema 4. Fie G o mulţime nevidă. Pe această mulţime se consideră legea de compoziţie ” $\cdot$ ” şi funcţia $f : G \to G, \ f(x) = \bar{x}, \ \forall x \in G$. Dacă

$$a \cdot (b \cdot c) = d \cdot (e \cdot c) \ \Rightarrow \ b = (\bar{a} \cdot d) \cdot e \qquad \forall a, b, c, d, e \in G,$$

demonstraţi că $(G, \cdot)$ este grup.

Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7.

Timp de lucru: 3 ore.

Succes!