

# CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ „ARGUMENT”

11 noiembrie 2017

CLASA a VI-a

La problemele 1 – 8 se scriu pe foaia de concurs doar literele corespunzătoare răspunsului considerat corect. Fiecare problemă are un singur răspuns corect.

- (5p) 1. Dacă  $a, b$  sunt numere prime și  $[2a, 3b] = 858$ , atunci  $a + b$  este:  
a) 143                      b) 24                      c) 144                      d) 59
- (5p) 2. Numărul natural de trei cifre care împărțit pe rând la 10, 11 și 12 dă resturile 5, 4 respectiv 3 este:  
a) 175                      b) 555                      c) 675                      d) 925
- (5p) 3. Numărul perechilor  $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  care verifică ecuația  $xy = x + 4096$  este :  
a) 1                      b) 12                      c) 2                      d) 13
- (5p) 4. Suma celor mai mari divizori impari ai numerelor 10, 11, 12, ..., 19 este:  
a) 100                      b) 145                      c) 10                      d) 64
- (5p) 5. Un segment are lungimea  $729\text{cm}$ . Se împarte segmentul în trei segmente congruente și se șterge segmentul din mijloc. Fiecare segment rămas se împarte în trei segmente congruente și se șterge segmentul din mijloc. Repetăm procedeul până când toate segmentele au lungimea de  $1\text{cm}$ . Numărul segmentelor rămase este:  
a) 128                      b) 243                      c) 64                      d) 729
- (5p) 6. Suplementul complementului unui unghi este egal cu complementul suplementului altui unghi. Suma măsurilor celor două unghiuri este:  
a)  $90^\circ$                       b)  $45^\circ$                       c)  $180^\circ$                       d) Nu există astfel de unghiuri
- (5p) 7. Avem la dispoziție segmente cu lungimile egale cu divizorii numărului 3000 exprimate în centimetri, câte un segment pentru fiecare divizor. Suma lungimilor acestor segmente este :  
a)  $3000\text{cm}$                       b)  $9360\text{cm}$                       c)  $136\text{cm}$                       d)  $74880\text{cm}$
- (5p) 8. Măsura unghiului format de bisectoarele a două unghiuri adiacente este  $46^\circ 30'$ . Dacă măsura unui unghi este cu  $37^\circ$  mai mare decât măsura celuilalt atunci măsura unghiului mai mic este:  
a)  $28^\circ$                       b)  $65^\circ$                       c)  $23^\circ$                       d)  $18^\circ$

La următoarele probleme se cer soluțiile complete, care se trec pe foaia de concurs.

- (15p) 9. Pentru numărul natural  $n$  vom nota cu  $S(n)$  suma cifrelor numărului  $n$ .  
a) Calculați  $S(a)$  unde  $a = 9 + 99 + \dots + \underbrace{999\dots99}_{2017 \text{ cifre de } 9}$ ;
- (10p) b) Arătați că  $(10^n - 1)(k + 1) = k \cdot 10^n + \left( \underbrace{999\dots99}_{n \text{ cifre de } 9} - k \right)$  pentru orice numere naturale  $n$  și  $k$ ;
- (10p) c) Să se calculeze  $S(999 \cdot k)$ , unde  $k$  este un număr natural de două cifre.
10. Un robocangur se găsește în punctul  $O$  de pe dreapta  $d$ . El face salturi pe dreapta  $d$  la stânga sau la dreapta punctului în care se află. Primul salt este de  $1\text{m}$  și fiecare salt, începând cu al doilea este dublu față de cel anterior.
- (10p) a) Să se arate că după 3 salturi robocangurul poate să ajungă la distanța de  $7\text{m}$  de  $O$  respectiv de  $5\text{m}$  de  $O$ .
- (5p) b) Să se demonstreze că robocangurul poate să ajungă în punctul  $A$  de pe dreapta  $d$  care se află la distanță 2017 metri de  $O$  la dreapta lui  $O$ .

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.

Timpul de lucru este 2 ore și 30 de minute. Se acordă 10 puncte din oficiu.

**SUCCES !**

# **CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ „ARGUMENT”**

**11 noiembrie 2017**

**CLASA a VI-a**

**BAREM**

1.  $[2a, 3b] = 2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 13, a, b > 1 \Rightarrow a = 11, b = 13$  sau invers

Deci  $a + b = 24$ .

Răspuns: b

2.

$$n = 10c_1 + 5; n = 11c_2 + 4; n = 12c_3 + 3 \Rightarrow n - 15 = 10(c_1 - 1); n - 15 = 11(c_2 - 1); n - 15 = 12(c_3 - 1) \Rightarrow \\ \Rightarrow n - 15 : [10, 11, 12] = 660 \Rightarrow n = 675$$

Răspuns: c

3.  $x(y-1) = 2^{12} \Rightarrow x \in D_{2^{12}}, y \in 1 + D_{2^{12}}, |D_{2^{12}}| = 13$

Răspuns: d

4. Cei mai mari divizorii impari sunt 5, 11, 3, 13, 7, 15, 1, 17, 9, 19 deci suma lor este 100

Răspuns: a

5. La fiecare pas numărul de segmente se dublează iar lungimea segmentelor devine de 3 ori mai mică. Deoarece  $729 = 3^6$  va trebui să aplicăm algoritmul de 6 ori deci numărul segmentelor este  $2^6 = 64$

Răspuns: c

6. Fie  $a, b$  măsurile celor două unghiuri atunci  $0^\circ \leq a \leq 90^\circ, 90^\circ \leq b \leq 180^\circ$  și

$$180^\circ - (90^\circ - a) = 90^\circ - (180^\circ - b) \Rightarrow b = 180^\circ + a \Rightarrow b = 180^\circ, a = 0^\circ \Rightarrow a + b = 180^\circ$$

Răspuns: c

7.  $3000 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^3 \Rightarrow$  Suma lungimilor este suma divizorilor numărului 3000 adică

$$\frac{3^2 - 1}{3 - 1} \cdot \frac{2^4 - 1}{2 - 1} \cdot \frac{5^4 - 1}{5 - 1} = 9360$$

Răspuns: b

8. Dacă notăm cu  $a, b$  măsurile celor două unghiuri atunci

$$\frac{a + b}{2} = 46^\circ 30' \Rightarrow a + b = 93^\circ, a = b + 37^\circ \Rightarrow b = 28^\circ$$

Răspuns: a

9. a)  $a = 10 - 1 + 100 - 1 + \dots + \underbrace{1000\dots00}_{2017} - 1 = \underbrace{111\dots110}_{2017} - 2017 = \underbrace{111\dots1109093}_{2013}$  deci .....**10p**

$S(a) = 1 \cdot 2013 + 2 \cdot 9 + 3 = 2034$  .....**5p**

b) Se efectuează calculele.....**10p**

c) Pentru  $k = 10 \Rightarrow 999 \cdot k = 9990 \Rightarrow S(9990) = 27$  .....**2p**

Pentru  $k \geq 11$  fie  $k = \overline{ab} + 1$  atunci din b) rezultă

$$999k = 1000k - k = 1000 \cdot \overline{ab} + 1000 - \overline{ab} - 1 = \overline{ab000} + (999 - \overline{ab})$$

Dar  $999 - \overline{ab}$  este un număr de trei cifre și diferența se efectuează fără treceri peste ordin deci

$$S(999 - \overline{ab}) = 27 - a - b.$$

La fel suma  $\overline{ab000} + (999 - \overline{ab})$  se efectuează fără treceri peste ordin deci

$$S(\overline{ab000} + (999 - \overline{ab})) = S(\overline{ab000}) + S(999 - \overline{ab}) = a + b + 27 - a - b = 27 \text{ .....} \mathbf{8p}$$

10. a) Pentru a ajunge la distanța de  $7m$  de  $O$  va face toate cele trei salturi la stânga (sau la dreapta) deci va fi la distanța  $1 + 2 + 4 = 7m$  de  $O$ . .....**5p**

Pentru a ajunge la distanța de  $5m$  de  $O$  va face primul salt la stânga de  $1m$  și celelalte două la dreapta de  $2m$  respectiv  $4m$  (sau invers). .....**5p**

b) Avem că  $2017 = 1 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9 + 2^{10}$  .....**2p**

Deoarece  $2^4 - 2^3 - 2^2 - 2 - 1 = 1$  atunci robocangurul va face primele patru salturi la stânga și următorul la dreapta deci va fi la distanța de  $1m$  la dreapta lui  $O$  iar următoarele 6 salturi la dreapta lui  $O$  și va ajunge la distanța de  $2017m$  la dreapta lui  $O$ .