Concursul Interjudeţean de Matematică “Argument”

Colegiul Naţional “Gheorghe Şincai” Baia-Mare

Ediţia a IX-a, 2017

CLASA A XI-A

Soluţii

Problema 1. Să se arate că pentru orice număr natural $n \geq 2$ este verificată egalitatea:

$$[\log_2 n] + \left[\log_2 \frac{n}{2}\right] + \left[\log_2 \frac{n}{3}\right] + \ldots + \left[\log_2 \frac{n}{n}\right] = \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{2^2}\right] + \left[\frac{n}{2^3}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{2^n}\right]$$

Vasile , Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

Soluţie. Considerăm funcţia

$$f : [1, n] \to \left[\frac{n}{2^n}, \frac{n}{2}\right],\ f(x) = n \cdot 2^{-x}$$

care este bijectivă (strict descrescătoare) şi considerăm porţiunea din plan cuprinsă între axele de coordonate şi graficul funcţiei:

$$D = \{(x, y) \mid x > 0,\ y > 0,\ y \leq f(x)\}$$

şi numărăm punctele laticiale din D în două moduri:

1) Pe dreapta $x = k$ avem $\left[\frac{n}{2^k}\right]$ puncte şi în total

$$N = [f(1)] + [f(2)] + \ldots + [f(n)] = \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{2^2}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{2^n}\right] \text{ puncte.}$$

2) Pe dreapta $y = p \in \{1, 2, 3, ..., \left[\frac{n}{2}\right]\}$ avem

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{n}{2^x} = p \Leftrightarrow 2^x = \frac{n}{p} \Leftrightarrow x = \log_2 \frac{n}{p},$$

deci pe această dreaptă avem $\left[\log_2 \frac{n}{p}\right]$ puncte laticiale. Numărul punctelor laticiale din domeniul D va fi

$$N = [\log_2 n] + \left[\log_2 \frac{n}{2}\right] + \left[\log_2 \frac{n}{3}\right] + \ldots + \left[\log_2 \frac{n}{n}\right],$$

ultimii termeni sunt zero.

■

Problema 2. O alee de dimensiuni $2 \times n$ se pavează cu dale 1×1 albe şi negre. Notăm cu a_n numărul pavajelor care nu conţin un pătrat monocolor 2×2.

a) Să se arate că există $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ astfel ca

$$a_{n+1} = \alpha a_n + \beta a_{n-1}, \ \forall \ n \geq 1.$$

b) Arătaţi că şirul $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ este convergent şi calculaţi $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

Vasile Pop, Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

Soluţie.

a) Notăm cu x_n numărul pavajelor bune în care ultima coloană are cele două dale de culori diferite şi cu y_n numărul pavajelor bune în care ultimele două dale sunt de aceeaşi culoare. Avem relaţiile de recurenţă:

$$x_{n+1} = 2x_n + 2y_n, \ y_{n+1} = 2x_n + y_n.$$

Avem $a_n = x_n + y_n$ şi prelucrând relaţiile obţinem:

$$a_{n+1} = 3a_n + 2a_{n-1}, \ \forall \ n \geq 2, \ \alpha = 3, \ \beta = 2.$$

b) Din $a_1 = 4, \ a_2 = 14$ ($a_0 = 1$) rezultă

$$a_n = \frac{1}{2\sqrt{17}} \left[\left(5 + \sqrt{17}\right) \left(\frac{3 + \sqrt{17}}{2}\right)^n - \left(5 - \sqrt{17}\right) \left(\frac{3 - \sqrt{17}}{2}\right)^n \right].$$

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3+\sqrt{17}}{2}$.

Varianta 2: Dacă $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ atunci $b_n = 3 + \frac{2}{b_{n-1}}$, rezultă $L = 3 + \frac{2}{L}$, deci $L = \frac{3+\sqrt{17}}{2}$. Se arată că subşirul termenilor impari este descrescător iar subşirul termenilor pari este crescător, ambele convergente.

■

Problema 3. Se consideră şirurile de numere reale $(a_n)_n, (b_n)_n$ definite prin relaţiile de recurenţă:

$$a_{n+1} = (1-\alpha)a_n + \alpha b_n, b_{n+1} = \beta a_n + (1-\beta)b_n, n \in \mathbb{N}$$

unde $\alpha, \beta \in (0,1)$ şi $a_0 < b_0$. Să se studieze monotonia, mărginirea, convergenţa şi limitele şirurilor.

Vasile Pop, Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

Soluţie.

Avem $b_{n+1} - a_{n+1} = (1-\alpha-\beta)(b_n - a_n), n \in \mathbb{N}$ deci şirul $c_n = b_n - a_n$ este progresie geometrică $b_n - a_n = q^n(b_0 - a_0)$ unde $q = 1-\alpha-\beta \in (-1,1)$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$.

Avem

$$a_{n+1} - a_n = \alpha(b_n - a_n) = \alpha q^n(b_0 - a_0) \qquad (1)$$

$$b_{n+1} - b_n = -\beta(b_n - a_n) = -\beta q^n(b_0 - a_0) \qquad (2)$$

Diferenţele $a_{n+1} - a_n$ şi $b_{n+1} - b_n$ au semne constante dacă $q \geq 0$, adică dacă şi numai dacă $\alpha + \beta \leq 1$ şi au semne alternante dacă $q < 0 \Leftrightarrow \alpha + \beta < 1$. În concluzie dacă $\alpha + \beta \leq 1$ şirurile sunt monotone ($(a_n)_n$ crescător şi $(b_n)_n$ descrescător) iar dacă $\alpha + \beta > 1$ şirurile nu sunt monotone.

Avem că a_{n+1} şi b_{n+1} se află între a_n şi b_n şi atunci şirurile sunt mărginite $a_n \in [a_0, b_0], b_n \in [a_0, b_0]$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Din relaţia (1) rezultă

$$a_n = a_0 + \alpha(b_0 - a_0)(1 + q + \ldots + q^{n-1}) = a_0 + \alpha(b_0 - a_0)\frac{1-q^n}{1-q} \longrightarrow a_0 + \alpha(b_0 - a_0)\frac{1}{1-q} = \frac{\beta a_0 + \alpha b_0}{\alpha + \beta}$$

şi analog $b_n \longrightarrow \frac{\beta a_0 + \alpha b_0}{\alpha+\beta}$. Şirurile sunt convergente la aceeaşi limită pentru orice $\alpha, \beta \in (0,1)$.

Barem: Mărginirea.......2p// Monotonia......2p// Convergenţa+limita.....3p.

■

Problema 4. Fie $f : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ o funcţie cu proprietatea

$$f(aX + bY) = af(X) + bf(Y),$$

pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$ şi orice $X, Y \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Să se arate că există o matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathscr{R})$ astfel ca $f(X) = Tr(A\cdot X)$ pentru orice $X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. (S-a notat cu $Tr(B)$ suma elementelor de pe diagonala principală a matricei B.).

Vasile Pop, Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

Soluţie. Notăm cu E_{ij} matricea care are 1 pe poziţia (i, j) şi 0 în rest. Orice matrice $X = [x_{ij}]_{i,j=\overline{1,n}}$ se scrie în mod unic sub forma $X = \sum_{i,j=1}^{n} x_{ij}E_{ij}$ şi atunci din relaţia dată rezultă

$$f(x) = \sum_{i,j=1}^{n} x_{ij}e_{ij} \quad (*)$$

undea $e_{ij} = f(E_{ij})$.

Acum pentru o matrice $A = [a_{ij}]_{i,j=\overline{1,n}}$ notând $C = A\cdot X$ avem $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_{kj}$ şi

$$c_{jj} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}x_{kj}, i, j \in \{1,\dots,n\}$$

şi atunci

$$Tr(C) = Tr(AX) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ji}x_{ij} \quad (**)$$

Din $(*), (**)$ rezultă că dacă luăm $a_{ji} = e_{ij} \;\; i, j = \overline{1,n}$ atunci $f(X) = \mathrm{Tr}(AX)$.

Observaţie: Dacă $A = I_n$ atunci $f(X) = Tr(I_n)$ iar dacă $A = [1]$ matricea cu toate elementele 1 atunci $f(X) = S(X)$, suma tuturor elementelor lui X. ∎