Concursul Interjudeţean de Matematică "Argument"
Colegiul Naţional "Gheorghe Şincai" Baia-Mare, Ediţia a IX-a, 2017

Clasa a XI-a

Problema 1. Să se arate că pentru orice număr natural $n \geq 2$ este verificată egalitatea:

$$[\log_2 n] + \left[\log_2 \frac{n}{2}\right] + \left[\log_2 \frac{n}{3}\right] + \ldots + \left[\log_2 \frac{n}{n}\right] = \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{2^2}\right] + \left[\frac{n}{2^3}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{2^n}\right]$$

Problema 2. O alee de dimensiuni $2 \times n$ se pavează cu dale 1×1 albe şi negre. Notăm cu a_n numărul pavajelor care nu conţin un pătrat monocolor 2×2.

a) Să se arate că există $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ astfel ca

$$a_{n+1} = \alpha a_n + \beta a_{n-1}, \ \forall\, n \geq 1.$$

b) Arătaţi că şirul $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ este convergent şi calculaţi $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

Problema 3. Se consideră şirurile de numere reale $(a_n)_n, (b_n)_n$ definite prin relaţiile de recurenţă:

$$a_{n+1} = (1-\alpha)a_n + \alpha b_n, b_{n+1} = \beta a_n + (1-\beta)b_n, n \in \mathbb{N}$$

unde $\alpha, \beta \in (0,1)$ şi $a_0 < b_0$. Să se studieze monotonia, mărginirea, convergenţa şi limitele şirurilor.

Problema 4. Fie $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ o funcţie cu proprietatea

$$f(aX + bY) = af(X) + bf(Y),$$

pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$ şi orice $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Să se arate că există o matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathcal{R})$ astfel ca $f(X) = Tr(A \cdot X)$ pentru orice $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. (S-a notat cu $Tr(B)$ suma elementelor de pe diagonala principală a matricei B.)

Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7.

Timp de lucru: 3 ore.

Succes!