Concursul Interjudeţean de Matematică “Argument”

Colegiul Naţional “Gheorghe Şincai” Baia-Mare

Ediţia a IX-a, 2017

CLASA A X-A

Soluţii

Problema 1. Fie x, y numere pozitive care verifică relaţiile:

$$x = y + \cfrac{1}{x + \cfrac{1}{y + \cfrac{1}{x + \dots}}}, \quad y = x - \cfrac{1}{y + \cfrac{1}{x - \cfrac{1}{y + \dots}}}$$

(unde x şi y apar de o infinitate de ori).

Să se determine $x + y$.

Vasile Pop, Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

Soluţie. Se observă relaţiile:

$$x = y + \cfrac{1}{x + \cfrac{1}{x}} \quad \text{şi} \quad y = x - \cfrac{1}{y + \cfrac{1}{y}}$$

$$\Leftrightarrow x = y + \frac{x}{x^2+1} \tag{1}$$

$$y = x - \frac{y}{y^2+1} \tag{2}$$

Adunând relaţiile (1) şi (2) obţinem:

$$\frac{x}{x^2+1} = \frac{y}{y^2+1} \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = y + \frac{1}{y}$$

$$\Leftrightarrow x - y = \frac{1}{y} - \frac{1}{x} \Leftrightarrow x - y = \frac{x-y}{xy}$$

$$\Leftrightarrow xy = 1 \text{ (deoarece } x > y) \tag{3}$$

Din (1) şi (3) rezultă

$$x = \frac{1}{x} + \frac{x}{x^2+1} \Leftrightarrow x = \frac{2x^2+1}{x(x^2+1)} \Leftrightarrow x^2(x^2+1) = 2x^2+1$$

$$\Leftrightarrow x^4 - x^2 - 1 = 0 \tag{4}$$

Din (2) şi (3) rezultă

$$y = \frac{1}{y} - \frac{y}{y^2+1} \Leftrightarrow y = \frac{1}{y(y^2+1)} \Leftrightarrow y^2(y^2+1) = 1$$

$$\Leftrightarrow y^4 + y^2 - 1 = 0 \tag{5}$$

Din (4) obţinem $x^2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, din (5) obţinem $y^2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$, deci

$$(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy \overset{(3)}{=} 2 + \sqrt{5}.$$

Rezultă $x + y = \sqrt{2+\sqrt{5}}$.

∎

Problema 2. Să se rezolve în mulţimea numerelor complexe (reale) sistemul de ecuaţii:

$$(x+2y)(x+2z)=7,\ (y+2z)(y+2x)=3,\ (z+2x)(z+2y)=11.$$

Vasile Pop, Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

Soluţie. Prin scăderea primele două ecuaţii se obţine:

$$x^2-y^2-2xz+2yz=4 \Leftrightarrow \left(x-y\right)\left(x+y-2z\right)=4.$$

Prin scăderea ultimele doă ecuaţii se obţine:

$$\left(y-z\right)\left(y+z-2x\right)=-8.$$

Se notează

$$x-y=a, y-z=b, \text{atunci } z-x=-a-b$$

şi cele două ecuaţi devin

$$\begin{cases} a\left(a+2b\right)=4 \\ b\left(-b-2a\right)=-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+2ab=4 \\ b^2+2ab=8 \end{cases}$$

Înmulţind prima ecuaţie cu 2 şi scăzând cele două ecuaţii se obţine

$$b^2-2ab-2a^2=0,$$

de unde avem

$$b=\left(1\pm\sqrt{3}\right)a$$

adică

$$a^2=\frac{4}{3\pm2\sqrt{3}}.$$

Prin urmare

$$a=\pm\frac{2}{3}\sqrt{6\sqrt{3}-9} \text{ sau } a=\pm\frac{2i}{3}\sqrt{6\sqrt{3}+9}.$$

Pentru fiecare valoare a lui a se obţin două valori ale lui b şi se determină soluţiile problemei.

■

Problema 3. Se consideră şirurile de numere reale $(x_n)_n$, $(y_n)_n$ definite prin relaţiile de recurenţă:

$$x_1 = y_1 = x_2 = y_2 = 1$$

şi

$$x_{n+1} = x_n y_{n-1} + x_{n-1} y_n,\ y_{n+1} = y_n y_{n-1} - x_n x_{n-1},\ n \geq 2.$$

a) Să se arate că $x_n^2 + y_n^2 = 2^{F_n}$, $n \in \mathbb{N}$, unde $(F_n)_n$ este şirul lui Fibonacci:

$$F_1 = F_2 = 1,\ F_{n+1} = F_n + F_{n-1}.$$

b) Să se arate că

$$y_n = \sqrt{2}^{F_n} \cos \frac{F_n \cdot \pi}{4} \quad \text{şi} \quad x_n = \sqrt{2}^{F_n} \sin \frac{F_n \cdot \pi}{4},\ \forall\ n \in \mathbb{N}^*.$$

Vasile Pop, Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

Soluţie.

a) Notând $u_n = x_n^2 + y_n^2$, ridicând la pătrat relaţiile date şi adunându-le obţinem:

$$u_{n+1} = u_n \cdot u_{n-1},\ n \geq 2.$$

Prin inducţie: $u_1 = 2 = 2^{F_1}$, $u_2 = 2 = 2^{F_2}$ şi din $u_n = 2^{F_n}$, $u_{n-1} = 2^{F_{n-1}}$ rezultă $u_{n+1} = 2^{F_n + F_{n-1}} = 2^{F_{n+1}}$.

b) Considerăm şirul de numere complexe $(z_n)_n$, $z_n = y_n + i x_n$ şi din relaţiile date obţinem recurenţa:

$$z_{n+1} = z_n \cdot z_{n-1},$$

din care prin inducţie deducem

$$z_n = z_1^{F_n} = (1+i)^{F_n} = \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^{F_n}$$

$$= \sqrt{2}^{F_n}\left(\cos\frac{F_n \cdot \pi}{4} + i \sin\frac{F_n \cdot \pi}{4}\right).$$

Rezultă

$$y_n = \sqrt{2}^{F_n} \cos\frac{F_n \cdot \pi}{4}, \quad x_n = \sqrt{2}^{F_n} \sin\frac{F_n \cdot \pi}{4}.$$

■

Problema 4. Fie funcţiile $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ surjectivă şi $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ injectivă.

a) Să se arate că dacă $f(n)\geq g(n),\ \forall\ n\in\mathbb{N}$ atunci ambele funcţii sunt bijective.

b) Rămâne adevărată concluzia de la a) dacă $f(n)\leq g(n),\ \forall\ n\in\mathbb{N}$?

Vasile Pop, Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

Soluţie. a) Deoarece f este surjectivă există $n_0\in\mathbb{N}$ astfel ca $f(n_0)=0$ şi din $0=f(n_0)\geq g(n_0)$ rezultă $g(n_0)=0$. Există $n_1\in\mathbb{N}$ astfel ca $f(n_1)=1$ şi din $1=f(n_1)\geq g(n_1)$ rezultă $g(n_1)\in\{0,1\}$, dar din $n_1\neq n_0$ şi $g(n_0)=0$ rezultă $g(n_1)=1$, deci $f(n_0)=g(n_0)$ şi $f(n_1)=g(n_1)$.

Arătăm prin inducţie după $k\in \operatorname{Im} f$ că $f(n)=g(n),\ \forall\ n$.

Fie $f(n_0)=g(n_0)=0,\ f(n_1)=g(n_1)=1,\dots,f(n_k)=g(n_k)=k$ şi $f(n_{k+1})=k+1$.

Din $f(n_{k+1})\geq g(n_{k+1})$ rezultă $g(n_{k+1})\in\{0,1,\dots,k,k+1\}$ şi cum g este injectivă şi deja a luat valorile $0,1,\dots,k$ rezultă $g(n_{k+1})=k+1$.

În concluzie $g=f$ şi ambele sunt injective şi surjective (bijective).

b) Rezultatul nu rămâne adevărat. De exemplu

$$f(n)=\left[\frac{n}{2}\right],\ n\in\mathbb{N}\quad \text{şi}\quad g(n)=n+1$$

în care f este neinjectivă şi g este nesurjectivă. ∎