COLEGIUL NAȚIONAL
GHEORGHE ȘINCAI
BAIA MARE

Concursul Interjudeţean de Matematică "Argument"

Colegiul Naţional "Gheorghe Şincai" Baia-Mare

Ediţia a IX-a, 2017

Clasa a XII-a

Soluţii

Problema 1. Să se determine funcţiile continue $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ cu primitiva $F:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ care verifică relaţia

$$(1)\qquad F(x)\cdot f(\frac{1}{x})=\frac{x}{2},\forall x\in(0,\infty),\quad f(1)=2.$$

Vasile Pop, Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

Soluţie. Înlocuind x cu $\frac{1}{x}$ obţinem

$$F(\frac{1}{x})\cdot f(x)=\frac{1}{2x}\quad (2).$$

Din (1) şi (2) obţinem:

$$F(x)\cdot f(\frac{1}{x})-x^2f(x)F(\frac{1}{x})=0\quad (3)$$

Deoarece $\frac{x}{2}\neq 0, x>0$ rezultă că funcţiile F şi f nu se anulează şi putem scrie relaţia (3) sub forma:

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{1}{x^2}\cdot\frac{f(\frac{1}{x})}{F(\frac{1}{x})}\Leftrightarrow$$

$$(\ln(F(x)))'=-(\ln F(\frac{1}{x}))'\Leftrightarrow(\ln(F(x)\cdot F(\frac{1}{x})))'=0$$

sau $F(x)\cdot F(\frac{1}{x})=c\quad (4)$.

Din (2) şi (4) rezultă

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{c}{2x}\Leftrightarrow(\ln F(x))'=\frac{c}{2}(\ln x)'\Leftrightarrow F(x)=c_1x^{\frac{c}{2}}, f(x)=\frac{c_1c}{2}x^{\frac{c}{2}-1}$$

şi verificăm relaţia iniţială:

$$c_1x^{\frac{c}{2}}\cdot\frac{c_1c}{2}x^{1-\frac{c}{2}}=\frac{c}{2}\Leftrightarrow c_1^2c=1 \text{ sau } c=\frac{1}{c_1^2}.$$

Deci $f(x)=\frac{1}{2c_1}\cdot x^{\frac{1}{2c_1^2}-1}, x>0, c_1\neq 0$. Din $f(1)=2\Rightarrow c_1=\frac{1}{4}$ şi $f(x)=2x^7,\forall x>0$ este singura funcţie.

■

Problema 2. Fie $f \in \mathbb{R}[X]$ un polinom de grad $n-1$ cu proprietatea

$$f(k) = \frac{1}{k},\ k = 1, 2, \ldots, n.$$

Să se determine $f(n+1)$.

Vasile Pop, Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

Soluţie. Considerăm polinomul $g(x) = xf(x) - 1$ care are gradul n şi verifică condiţiile

$$g(1) = g(2) = \ldots = g(n) = 0,$$

astfel că există o constantă $a \in \mathbb{R}^*$ astfel ca

$$g(x) = a(x-1)(x-2)\ldots(x-n).$$

Avem $g(0) = a(-1)^n \cdot n! = 0 \cdot f(0) - 1 = -1$ deci

$$a = \frac{(-1)^{n-1}}{n!}$$

şi atunci

$$g(n+1) = \frac{(-1)^{n-1}}{n!} \cdot n! = (-1)^{n-1}$$

sau

$$(n+1)f(n+1) = 1 + (-1)^{n-1}$$

sau

$$f(n+1) = \frac{1+(-1)^{n-1}}{n+1} = \begin{cases} 0 & \text{dacă} n \quad \text{par} \\ \dfrac{2}{n+1} & \text{dacă} n \quad \text{impar.} \end{cases}$$

■

Problema 3. Pentru fiecare matrice $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ definim multimea ;
$G(A) = \{X \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) | det(A+X) = detA + detX\}$
a) Sa se arate ca $(G(A),+)$ este grup.
b) Sa se arate ca daca $A \neq 0$ si $B \neq 0$ atunci grupurile $(G(A),+)$ si $(G(B),+)$ sunt izomorfe.

Vasile Pop, Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

Soluţie. a) Daca $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ si $X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$ atunci $X \in G(A)$ daca si numai daca

$$(a+x)(d+t)-(b+y)(c+z) = ad-bc+xt-yz \Leftrightarrow at-bz-cy+dx = 0 \quad (*)$$

Daca $X_1, X_2 \in G(A)$ avem ; $at_1 - bz_1 - cy_1 + dx_1 = 0$ si $at_2 - bz_2 - cy_2 + dx_2 = 0$, deci

$$a(t_1-t_2) - b(z_1-z_2) - c(y_1-y_2) + d(x_1-x_2) = 0$$

adica $X_1 - X_2 \in G(A)$ si astfel $(G(A),+)$ este subgrup al grupului $(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}),+)$.
b) Consideram matricele $E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ si avem:
$G(E_{11}) = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & 0 \end{bmatrix} | x,y,z \in \mathbb{R} \right\}, G(E_{12}) = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix} | x,y,z \in \mathbb{R} \right\}, G(E_{21}) = \left\{ \begin{bmatrix} x & 0 \\ y & z \end{bmatrix} | x,y,z \in \mathbb{R} \right\},$
$G(E_{22}) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & x \\ y & z \end{bmatrix} | x,y,z \in \mathbb{R} \right\}$.

Functiile :

$f_1 : G(E_{11}) \longrightarrow G(E_{12}), f_1\left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix}$

$f_2 : G(E_{11}) \longrightarrow G(E_{21}), f_2\left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x & 0 \\ y & z \end{bmatrix}$

$f_3 : G(E_{11}) \longrightarrow G(E_{22}), f_3\left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & x \\ y & z \end{bmatrix},$

pentru orice $x,y,z \in \mathbb{R}$ sunt izomorfisme, deci grupurile $(G(E_{11}),+),(G(E_{12}),+)(G(E_{21}),+),(G(E_2),+)$ sunt grupuri izomorfe.

Daca $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ distingem cazurile :

1) Daca $a \neq 0$ atunci $G(A) \cong G(E_{11})$ prin izomorfismul

$$f : G(E_{11}) \longrightarrow G(A), f\left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} xa & ay \\ az & -dx+cy+bz \end{bmatrix}$$

2) Daca $b \neq 0$ atunci $G(A) \cong G(E_{12})$ prin izomorfismul

$$f : G(E_{12}) \longrightarrow G(A), f\left(\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} bx & by \\ dx-cy+az & bz \end{bmatrix}$$

3) Daca $c \neq 0$ atunci $G(A) \cong G(E_{21})$ prin izomorfismul

$$f : G(E_{21}) \longrightarrow G(A), f\left(\begin{bmatrix} x & 0 \\ y & z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} cx & az - by + dx \\ cy & cz \end{bmatrix}$$

4) Daca $d \neq 0$ atunci $G(A) \cong G(E_{22})$ prin izomorfismul

$$f : G(E_{22}) \longrightarrow G(A), f\left(\begin{bmatrix} 0 & x \\ y & z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} cx + by - az & dx \\ dy & dz \end{bmatrix}$$

In concluzie $G(A) \cong G(E_{11})$ pentru orice $A \neq 0, A \in\ M_2(R)$
Obs: Definim $H(A) = \{X \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) | Tr(AX) = Tr A \cdot Tr X\}$ si avem $H(A) = G(A)$ deci $(H(A), +)$ este grup si $(G(A), +) \cong (H(B), +), \forall A$ si $B \neq 0$

■

Problema 4. Fie G o mulţime nevidă. Pe această mulţime se consideră legea de compoziţie "$\cdot$" şi funcţia $f : G \to G$, $f(x) = \bar{x}$, $\forall x \in G$. Dacă

$$a \cdot (b \cdot c) = d \cdot (e \cdot c) \;\Rightarrow\; b = (\bar{a} \cdot d) \cdot e \qquad \forall a, b, c, d, e \in G,$$

demonstraţi că $(G, \cdot)$ este grup.

Vlad Mihaly, Cluj-Napoca

Soluţie. Deoarece $a \cdot (b \cdot c) = a \cdot (b \cdot c)$, avem $b = (\bar{a} \cdot a) \cdot b$, $\forall a, b \in G$.
Definim mulţimea $A = \{\bar{a} \cdot a | a \in G\}$. Avem $b = u \cdot b$, $\forall u \in A$. Dacă ar exista $u_1 \neq u_2 \in A$, fie $u_1 = \bar{a}_1 \cdot a_1$ şi $u_2 = \bar{a}_2 \cdot a_2$. Luând $a = d = a_1$, $b = u_1$, $c = u_2$, avem că $a_1 \cdot (u_1 \cdot c) = a_1 \cdot (u_2 \cdot c)$, ceea ce implică $u_1 = (\bar{a}_1 \cdot a_1) \cdot u_2 = u_1 \cdot u_2 = u_2$ (contradicţie).
Deci $A = \{u\}$, ceea ce implică $\bar{a} \cdot a = u$ $\forall a \in G$ şi $b = u \cdot b$ $\forall b \in G$.
Luând $a = c = d = e = u$ şi $b = \bar{u}$, avem $u \cdot (\bar{u} \cdot u) = u \cdot (u \cdot u)$, ceea ce implică $\bar{u} = (\bar{u} \cdot u) \cdot u = u \cdot u = u$, deci $\bar{u} = u$.
Avem $a \cdot (u \cdot b) = a \cdot b = u \cdot (a \cdot b) \;\Rightarrow\; a = (\bar{u} \cdot a) \cdot u = a \cdot u$ $\forall a \in G$. Deci u este elementul neutru al legii "$\cdot$".
Avem $b \cdot c = u \cdot (b \cdot c)$. Ne propunem să rezolvăm în G ecuaţia $b \cdot c = d \cdot (e \cdot c)$, care are soluţia $b = (\bar{u} \cdot d) \cdot e = d \cdot e$. Deci

$$(d \cdot e) \cdot c = d \cdot (e \cdot c) \;\forall c, d, e \in G,$$

adică legea $\cdot$ este asociativă pe G.
Avem că $\bar{a} \cdot a = u$ şi compunând cu $\bar{\bar{a}}$ la stânga şi cu $\bar{a}$ la dreapta, folosind asociativitatea, avem:

$$\bar{\bar{a}} \cdot \bar{a} \cdot a \cdot \bar{a} = \bar{\bar{a}} \cdot \bar{a} \;\Rightarrow\; a \cdot \bar{a} = u,$$

deci $\bar{a} \cdot a = a \cdot \bar{a} = u$ $\forall a \in G$, deci orice element este simetrizabil în raport cu legea $\cdot$.
Aşadar, $(G, \cdot)$ este grup.

■