COLEGIUL NAȚIONAL

GHEORGHE ȘINCAI

BAIA MARE

Concursul Interjudeţean de Matematică "Argument"
Colegiul Naţional "Gheorghe Şincai" Baia-Mare, Ediţia a IX-a, 2017

Clasa a X-a

Problema 1. Fie x, y numere pozitive care verifică relaţiile:

$$x = y + \cfrac{1}{x + \cfrac{1}{y + \cfrac{1}{x + \dots}}}, \quad y = x - \cfrac{1}{y + \cfrac{1}{x - \cfrac{1}{y + \dots}}}$$

(unde x şi y apar de o infinitate de ori).

Să se determine $x + y$.

Problema 2. Să se rezolve în mulţimea numerelor complexe (reale) sistemul de ecuaţii:

$$(x + 2y)(x + 2z) = 7, \ (y + 2z)(y + 2x) = 3, \ (z + 2x)(z + 2y) = 11.$$

Problema 3. Se consideră şirurile de numere reale $(x_n)_n$, $(y_n)_n$ definite prin relaţiile de recurenţă:

$$x_1 = y_1 = x_2 = y_2 = 1$$

şi

$$x_{n+1} = x_n y_{n-1} + x_{n-1} y_n, \ y_{n+1} = y_n y_{n-1} - x_n x_{n-1}, \ n \geq 2.$$

a) Să se arate că $x_n^2 + y_n^2 = 2^{F_n}$, $n \in \mathbb{N}$, unde $(F_n)_n$ este şirul lui Fibonacci:

$$F_1 = F_2 = 1, \ F_{n+1} = F_n + F_{n-1}.$$

b) Să se arate că

$$y_n = \sqrt{2}^{F_n} \cos \frac{F_n \cdot \pi}{4} \quad \text{şi} \quad x_n = \sqrt{2}^{F_n} \sin \frac{F_n \cdot \pi}{4}, \ \forall \ n \in \mathbb{N}^*.$$

Problema 4. Fie funcţiile $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ surjectivă şi $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ injectivă.

a) Să se arate că dacă $f(n) \geq g(n)$, $\forall \ n \in \mathbb{N}$ atunci ambele funcţii sunt bijective.

b) Rămâne adevărată concluzia de la a) dacă $f(n) \leq g(n)$, $\forall \ n \in \mathbb{N}$?

Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7.

Timp de lucru: 3 ore.

Succes!