Concursul Interjudeţean de Matematică “Argument”

Colegiul Naţional “Gheorghe Şincai” Baia-Mare

Ediţia a IX-a, 2017

Clasa a IX-a

Soluţii

Problema 1. Fie polinomul $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$, unde $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ astfel ca

$$P\left(\sqrt{10}\right) = 97531 + 8642\sqrt{10}.$$

Să se determine $P(1)$ şi $P(10)$.

Vasile Pop, Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

Soluţie. Avem

$$P\left(\sqrt{10}\right) = a_0 + 10a_2 + 10^2 a_4 + \ldots + (a_1 + 10a_3 + 10^2 a_5 + \ldots)\sqrt{10},$$

şi obţinem

$$a_0 + 10a_2 + 10^2 a_4 + \ldots = 97531,\ a_0, a_2, a_4, \ldots \in \{0, 1, \ldots, 9\} \quad (1)$$

$$a_1 + 10a_3 + 10^2 a_5 + \ldots = 8642,\ a_1, a_3, a_5, \ldots \in \{0, 1, \ldots, 9\} \quad (2)$$

Relaţia (1) reprezintă scrierea în baza 10 a numărului 97531 care este unică, deci

$$a_0 = 1,\ a_2 = 3,\ a_4 = 5,\ a_6 = 7,\ a_8 = 9$$

iar relaţia (2) reprezintă scrierea în baza 10 a numărului 8642, deci

$$a_1 = 2,\ a_3 = 4,\ a_5 = 6,\ a_7 = 8,\ a_9 = 0,\ a_{11} = 0, \ldots$$

În concluzie $P(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + 9x^8$.

$$P(1) = 1 + 2 + \ldots + 9 = 45,\ P(10) = 987654321.$$

■

Problema 2. Să se arate că pentru orice $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ există $p, q \in \mathbb{Q}$ şi $r, s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ astfel ca

$$a^2 - pa + r = a^2 - sa + q = 0.$$

Vasile Pop, Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

Soluţie. Pentru p şi r analizăm cazurile:

1) Dacă $a^2 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ alegem $p = 0$ şi $r = -a^2$.

2) Dacă $a^2 \in \mathbb{Q}$ alegem $p = a^2$ şi $r = a^3 - a^2 = a^2(a-1) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Pentru s şi q observăm că

$$\left(a + \frac{2}{a}\right) - \left(a + \frac{1}{a}\right) = \frac{1}{a} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

deci $a + \frac{1}{a} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sau $a + \frac{2}{a} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

În cazul întâi alegem $q = 1$ şi $s = a + \frac{1}{a}$ iar în cazul doi alegem $q = 2$ şi $s = a + \frac{2}{a}$.

Observaţie. Dacă se consideră ecuaţia de gradul doi $x^2 - px + r = 0$, o rădăcină a ei este $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ şi fie cealaltă b. Obţinem $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $a + b = p$ şi $a \cdot b = r$. Problema ne spune că există $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ astfel ca $a + b \in \mathbb{Q}$ şi $a \cdot b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Analog, considerând ecuaţia $x^2 - sx + q = 0$, există $c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ astfel ca $a + c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ şi $a \cdot c \in \mathbb{Q}$. ∎

Problema 3. Se consideră şirurile de numere reale $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ care verifică relaţiile de recurenţă:

$$a_0 = 2,\ b_0 = -1,$$
$$a_{n+1} = a_n + b_n + \sqrt{a_n^2 + b_n^2},\ b_{n+1} = a_n + b_n - \sqrt{a_n^2 + b_n^2}.$$

Să se determine $[a_n]$ şi $[b_n]$, $n \in \mathbb{N}$.

Vasile Pop, Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

Soluţie. Prin adunare şi prin înmulţirea relaţiilor obţinem

$$a_{n+1} + b_{n+1} = 2(a_n + b_n) \Rightarrow a_n + b_n = 2^n(a_0 + b_0) = 2^n$$

$$a_{n+1} \cdot b_{n+1} = 2a_n \cdot b_n \Rightarrow a_n \cdot b_n = 2^n a_0 \cdot b_0 = -2^{n+1}$$

a_n şi b_n sunt soluţiile ecuaţiei

$$x^2 - 2^n x - 2^{n+1} = 0$$
$$x_{1,2} = \frac{2^n \pm \sqrt{2^{2n} + 4 \cdot 2^{n+1}}}{2} = \frac{2^n \pm \sqrt{2^{2n} + 2^{n+3}}}{2}$$
$$= 2^{n-1} \pm \sqrt{2^{2n-2} + 2^{n+1}},\ n \geq 1$$
$$a_n = 2^{n-1} + \sqrt{2^{2n-2} + 2^{n+1}},\ n \geq 1$$
$$b_n = 2^{n-1} - \sqrt{2^{2n-2} + 2^{n+1}},\ n \geq 1.$$

- Pentru $n \geq 1$, $a_n \notin \mathbb{Z}$, $b_n \notin \mathbb{Z}$ iar

  - $b_n \in (-2, -1) \Leftrightarrow [b_n] = -2, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

Demonstraţie. Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ avem

$$b_n = 2^{n-1} - \sqrt{(2^{n-1})^2 + 2^{n+1}} < -1 \Leftrightarrow 2^{n-1} + 1 < \sqrt{2^{2n-2} + 2^{n+1}} \Leftrightarrow 2^{2n-2} + 2^n + 1 < 2^{2n-2} + 2^{n+1} \Leftrightarrow 1 < 2^n$$

şi

$$b_n = 2^{n-1} - \sqrt{(2^{n-1})^2 + 2^{n+1}} > -2 \Leftrightarrow 2^{n-1} + 2 > \sqrt{2^{2n-2} + 2^{n+1}} \Leftrightarrow 2^{2n-2} + 2^{n+1} + 4 > 2^{2n-2} + 2^{n+1} \Leftrightarrow 4 > 0$$

- $[a_n] = [S_n - b_n] = [2^n - b_n] = 2^n + 1.$ ■

Problema 4. Să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, există în plan o mulţime finită de vectori X_n, astfel ca pentru orice vector $\overline{v} \in X_n$, există exact n vectori $\overline{v_1}, \overline{v_2}, \ldots, \overline{v_n} \in X_n$ cu proprietatea

$$|\overline{v} - \overline{v_1}| = |\overline{v} - \overline{v_2}| = \ldots = |\overline{v} - \overline{v_n}| = 1.$$

Vasile Pop, Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

Soluţie. Vom demonstra afirmaţia prin inducţie după n, definind inductiv mulţimile $X_n, n \geq 1$.

Pentru $n = 1$ alegem $X_1 = \{\overline{v_1}, \overline{v_2}\}$ unde $|\overline{v_1} - \overline{v_2}| = 1$.

Pentru $n = 2$ definim $X_2 = X_1 \cup Y_1$ unde $Y_1 = \{\overline{v_3}, \overline{v_4}\}, \overline{v_3} = \overline{w_1} + \overline{v_1}, \overline{v_4} = \overline{w_1} + \overline{v_2}$ iar vectorul $\overline{w_1}$ are proprietăţile

$$|\overline{w_1}| = 1,\ \overline{w_1} + \overline{v_1} \neq \overline{v_2}, \overline{w_1} + \overline{v_2} \neq \overline{v_1},\ (\Leftrightarrow \overline{v_3} \notin X_1, \overline{v_4} \notin X_1),$$

$$|\overline{w_1} + \overline{v_1} - \overline{v_2}| \neq 1,\ |\overline{w_1} - \overline{v_1} + \overline{v_2}| \neq 1\ (\Leftrightarrow |\overline{v_3} - \overline{v_2}| \neq 1), |\overline{v_4} - \overline{v_1}| \neq 1)$$

Avem relaţiile:

$$|\overline{v_1} - \overline{v_2}| = |\overline{v_1} - \overline{v_3}| = 1, |\overline{v_1} - \overline{v_4}| \neq 1$$

$$|\overline{v_2} - \overline{v_1}| = |\overline{v_2} - \overline{v_4}| = 1, |\overline{v_2} - \overline{v_3}| \neq 1$$

$$|\overline{v_3} - \overline{v_1}| = |\overline{v_3} - \overline{v_4}| = 1, |\overline{v_3} - \overline{v_2}| \neq 1$$

$$|\overline{v_4} - \overline{v_3}| = |\overline{v_4} - \overline{v_2}| = 1, |\overline{v_4} - \overline{v_1}| \neq 1$$

deci mulţimea X_2 are proprietatea cerută pentru $n = 2$.

Presupunem că am construit mulţimea X_n şi definim $X_{n+1} = X_n \cup Y_n$ unde $Y_n = \overline{w_n} + X_n$ şi vectorul $\overline{w_n}$ este ales astfel ca

$$|\overline{w_n}| = 1, \overline{w_n} \neq \overline{v_1} - \overline{v_2}, \forall \overline{v_1}, \overline{v_2} \in X_n (\Leftrightarrow X_n \cap Y_n = \emptyset)$$

şi $|\overline{w_n} + \overline{v_1} - \overline{v_2}| \neq 1, \forall \overline{v_1}, \overline{v_2} \in X_n$ cu $\overline{v_1} \neq \overline{v_2}$.

Observaţie: Mulţimea X_n are 2^n vectori. ∎