BAREM – Concursul „Argument” 2017, clasa a VIII-a

1	2	3	4	5	6	7	8
-16	**-1**	**12**	**11**	**2**	**un cerc**	**63**	$\mathbf{2\sqrt{3}}$
c)	**b)**	**d)**	**b)**	**a)**	**c)**	**c)**	**a)**

9. a) $f(2k+1)=2k+1$, pentru orice $k\in\mathbb{N}$, deci și pentru $k=\overline{10,19}$ .... 2 p

$S(20)=\left(f(21)+f(23)+\ldots+f(39)\right)+\left(f(22)+f(24)+\ldots+f(40)\right)$

$S(20)=(21+23+\ldots+39)+(11+3+13+7+15+1+17+9+19+5)$ .... 5 p

$S(20)=\sum_{k=1}^{20}(2k-1)=400$ .... 3 p

b) Orice număr natural $N\in\mathbb{N}^*$ se scrie în mod unic sub forma $N=2^k(2l+1)$, $k,l\in\mathbb{N}$ .... 2 p

Obținem $f(N)=2l+1$ .... 1 p

Arătăm că pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ mulțimea $\{f(n+1), f(n+2),\ldots, f(2n)\}$ coincide cu $\{1,3,5,\ldots,2n-1\}$ .... 1 p

Dacă $a,b\in\{n+1,n+2,\ldots,2n\}$, cu $a<b$, arătăm că $f(a)\neq f(b)$ .... 1 p

Avem $a=2^{k_1}(2l_1+1)$ și $b=2^{k_2}(2l_2+1)$. Presupunem că $f(a)=f(b)$, adică $l_1=l_2$ 2p

Deoarece $a<b$, rezultă $2^{k_1}<2^{k_2}$, deci $k_1\leq 1+k_2$, adică $\dfrac{b}{a}=2^{k_2-k_1}\geq 2$ .... 2 p

Dar $\dfrac{b}{a}\leq\dfrac{2n}{n+1}<2$, contradicție. .... 2 p

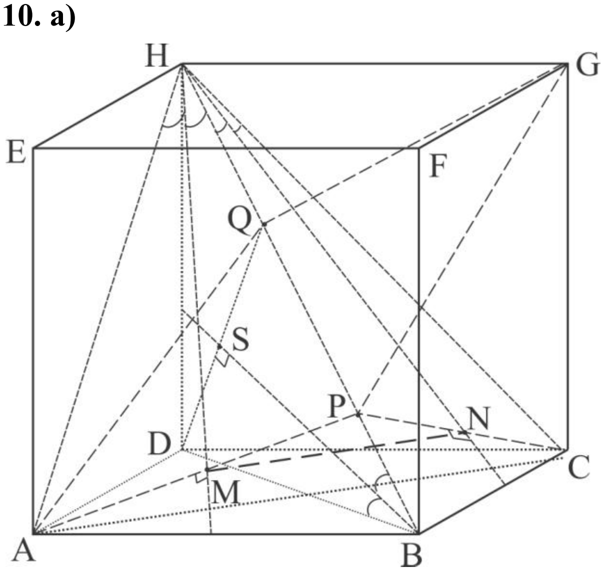
Așadar $f(a)\neq f(b)$, pentru $a,b\in\{n+1,n+2,\ldots,2n\}$, cu $a\neq b$.

În concluzie, numerele $f(n+1), f(n+2),\ldots, f(2n)$ sunt distincte, impare și cel mult egale cu $2n-1$........ 1 p

Rezultă că $\{f(n+1), f(n+2),\ldots, f(2n)\}=\{1,3,5,\ldots,2n-1\}$.

Suma este $S(n)=1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$. .... 3 p

10. a)



În $\triangle AHP$, HM e bisectoare și înălțime, deci $AH=HP$ .... 3 p

Fie $\{P'\}=CN\cap BH$.

Deoarece în $\triangle CHP'$, HN e bisectoare și înălțime, avem $CH=HP'$, dar $CH=AH$, deci $HP=HP'$, adică $P=P'$ .. 3 p

$\triangle AHP$ e isoscel cu baza $[AP]$, deci M e mijlocul lui $[AP]$.

$\triangle CHP$ e isoscel cu baza $[CP]$, deci N e mijlocul lui $[CP]$.

Rezultă că $[MN]$ este linie mijlocie în $\triangle ACP$, adică $MN \parallel AC$ .... 4 p

b) Fie a latura cubului. Avem $AH=HP=a\sqrt{2}$. .... 2 p

Deoarece în $\triangle BDQ$, BS e bisectoare și înălțime, rezultă că $BQ=BD=a\sqrt{2}$ .... 3 p

Obținem $BP=HQ=\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)a$, deci mijlocul segmentului $[PQ]$ este centrul O al cubului. .... 5 p

Deoarece diagonalele $[AC]$ și $[PQ]$ se înjumătățesc, $APGQ$ este un paralelogram. .... 5 p