COLEGIUL NAȚIONAL
GHEORGHE ȘINCAI
BAIA MARE

Concursul Interjudeţean de Matematică "Argument"
Colegiul Naţional "Gheorghe Şincai" Baia-Mare, Ediţia a IX-a, 2017

Clasa a IX-a

Problema 1. Fie $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$, unde $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ astfel ca

$$P\left(\sqrt{10}\right) = 97531 + 8642\sqrt{10}.$$

Să se determine $P(1)$ şi $P(10)$.

Problema 2. Să se arate că pentru orice $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ există $p, q \in \mathbb{Q}$ şi $r, s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ astfel ca

$$a^2 - pa + r = a^2 - sa + q = 0.$$

Problema 3. Se consideră şirurile de numere reale $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ care verifică relaţiile de recurenţă:

$$a_0 = 2,\ b_0 = -1,$$
$$a_{n+1} = a_n + b_n + \sqrt{a_n^2 + b_n^2},\ b_{n+1} = a_n + b_n - \sqrt{a_n^2 + b_n^2}.$$

Să se determine $[a_n]$ şi $[b_n]$, $n \in \mathbb{N}$.

Problema 4. Să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, există în plan o mulţime finită de vectori X_n, astfel ca pentru orice vector $\overline{v} \in X_n$, există exact n vectori $\overline{v_1}, \overline{v_2}, \ldots, \overline{v_n} \in X_n$ cu proprietatea $|\overline{v} - \overline{v_1}| = |\overline{v} - \overline{v_2}| = \ldots = |\overline{v} - \overline{v_n}| = 1$.

Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7.

Timp de lucru: 3 ore.

Succes!