ROMÂNIA
Ministerul Educaţiei Naţionale
Colegiul Naţional „Gheorghe Şincai", Baia Mare

CONCURSUL „ARGUMENT" CLASA a VII-a

11 noiembrie 2017

La problemele 1 – 8 se scriu pe foaia de concurs doar literele corespunzătoare răspunsului considerat corect. Fiecare problemă are un singur răspuns corect.

(5p) **1.** Dacă $x\cdot 2^{2016}=\left(2^{2017}-1\right):\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{2016}}\right)$, atunci x este:

a) 4 b) 2 c) 1 d) 23

(5p) **2.** Valoarea sumei $S=\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 6}+\frac{1}{3\cdot 8}+\frac{1}{4\cdot 10}+\cdots+\frac{1}{24\cdot 50}$ este:

a) $\frac{24}{25}$ b) 1 c) $\frac{12}{25}$ d) $\frac{25}{12}$

(5p) **3.** Dacă $x_1,x_2,\cdots x_5\in\mathbb{Z}$ şi $x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4\cdot x_5=-1$, atunci mulţimea valorilor produsului $P=\left(x_1+\frac{1}{x_2}\right)\cdot\left(x_2+\frac{1}{x_3}\right)\cdot\left(x_3+\frac{1}{x_4}\right)\cdot\left(x_4+\frac{1}{x_5}\right)\cdot\left(x_5+\frac{1}{x_1}\right)$ este :

a) $\{0\}$ b) $\{-10,32\}$ c) $\{-32,0,32\}$ d) $\{-32,0\}$

(5p) **4.** Soluţia ecuaţiei $|x-1|+|x-2|+\cdots+|x-9|=10(x-11)$ este:

a) 40 b) 65 c) 60 d) 17

(5p) **5.** Se dă şirul: $a_1=1+\frac{1}{1},a_2=1+\frac{1}{2},a_3=1+\frac{1}{3},\cdots,a_n=1+\frac{1}{n},\cdots$ cu $n\in\mathbb{N}^*$. Numărul tripletelor (a_k,a_{k+1},a_{k+2}) de termeni consecutivi ai şirului cu $a_k\cdot a_{k+1}\cdot a_{k+2}\in\mathbb{N}$ este:

a) 1 b) 2 c) 3 d) infinit

(5p) **6.** Se construieşte pătratul $ACDE$ în exteriorul triunghiului echilateral ABC. Măsura unghiului $\measuredangle DBC$ este:

a) 15° b) 20° c) 30° d) 45°

(5p) **7.** Liniile mijlocii ale triunghiului isoscel ABC au lungimile de 5 respectiv 11 cm. Perimetrul triunghiului ABC este:

a) 42 cm b) 54 cm c) 56 cm d) 49 cm

(5p) **8.** Fie $ABCD$ un trapez isoscel cu $AB\parallel CD$, $m(\measuredangle B)=60^\circ$, $AD=DC=CB$, iar linia mijlocie are lungimea $30cm$. Perimetrul trapezului este:

a) $45cm$ b) 60 cm c) 85cm d) 100 cm

La următoarele probleme se cer soluţiile complete.

9. Pentru fiecare $n\in\mathbb{N}$, notăm cu x_n cel mai mare număr natural impar care divide pe n şi cu $S_n=x_{n+1}+x_{n+2}+\cdots+x_{2n}$, $n\in\mathbb{N}^*$.

(5p) a) Calculaţi $S(4)$;

(15p) b) Arătaţi că dacă $a,b\in\{n+1,n+2,\cdots,2n\}, a\neq b,$ atunci $x_a\neq x_b$;

(10p) c) Calculaţi $S(n)$.

10. Se consideră triunghiul echilateral ABC şi punctele $M\in(AB), N\in(AC)$ astfel încât $AB=3BM$ şi $AC=3AN$, iar $\{Q\}=BN\cap CM$.

(10p) a) Demonstraţi că $MN\perp AC$;

(10p) b) Calculaţi $m(\measuredangle BQC)$.

Notă: Timpul de lucru este 2 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu. ***SUCCES !***

Barem - Clasa a VII-a

1. $x\cdot 2^{2016}=\left(2^{2017}-1\right):\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{2016}}\right)\Rightarrow x\cdot 2^{2016}=\left(2^{2017}-1\right):\frac{2^{2017}-1}{2^{2016}}\Rightarrow x=1$

2. $S=\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 6}+\frac{1}{3\cdot 8}+\frac{1}{4\cdot 10}+\cdots+\frac{1}{24\cdot 50}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{24\cdot 25}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{25}\right)=\frac{12}{25}$

3. $x_1,x_2,\cdots x_5\in\{-1,1\}$. Dacă $x_1=x_2=\cdots x_5=-1\Rightarrow P=-32$; dacă există $x_k=1,\ x_l=-1,\quad k,l\in\{1,2,\cdots,5\}$, atunci $P=0$.

4. Din $x\geq 11\Rightarrow 9x-45=10x-110\Rightarrow x=65$.

5. $\left(1+\frac{1}{k}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{k+1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{k+2}\right)=1+\frac{3}{k}\in\mathbb{N}\Rightarrow k\in\{1,3\}$.

6. Triunghiul BCD este isoscel $[CB]\equiv[CD]$ şi $m(\measuredangle BCD)=150^\circ$, deci $m(\measuredangle DBC)=15^\circ$.

7. 5;5,11 nu este posibil (din inegalitatea triunghiului), deci liniile mijlocii au lungimile 5;11; 11. Perimetrul este $(5+11+11)\cdot 2=54$.

8. $AD=DC=CB=20cm\Rightarrow P_{ABCD}=100cm$

1	2	3	4	5	6	7	8
c	c	d	b	b	a	b	d

9. a) $S(4)=1+3+5+7=16$;

b) Fie $a=2^{k_1}(2l_1+1), b=2^{k_2}(2l_2+1)$, cu $a<b$. Din $x_a=x_b\Rightarrow 2l_1+1=2l_2+1\Rightarrow l_1=l_2$. Atunci $\frac{b}{a}=2^{k_2-k_1}\geq 2$ şi $\frac{b}{a}\leq\frac{2n}{n+1}<2$, deci fals. Deducem că $x_{n+1},x_{n+2},\cdots,x_{2n}$ sunt distincte, impare şi cel mult egale cu $2n-1$, deci $\{x_{n+1},x_{n+2},\cdots,x_{2n}\}=\{1,3,\cdots,2n-1\}$.

c) $S(n)=1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$.

10. a) Fie $NP\parallel BC, P\in AB\Rightarrow NP=AP=PM\Rightarrow MN\perp AN$.

b) $\Delta ABN\equiv\Delta BCM\ (LUL)\Rightarrow\measuredangle ABN\equiv\measuredangle MCB$. Atunci

$m(\measuredangle BQC)=180^\circ-\left(m(\measuredangle QBC)+m(\measuredangle QCB)\right)=180^\circ-\left(m(\measuredangle QBC)+m(\measuredangle ABN)\right)=$

$=180^\circ-60^\circ=120^\circ$