CONCURSUL „ARGUMENT”
Baia Mare, 11 noiembrie 2017

CLASA a V-a

La problemele 1-8, scrieţi pe foaia de concurs doar litera corespunzătoare răspunsului corect.

(5p) **1.** Cel mai mic număr natural de trei cifre distincte, cu proprietatea că produsul cifrelor sale este 8, are triplul egal cu:

a) 354 b) 372 c) 324 d) 777

(5p) **2.** Numărul natural x pentru care $1+2\cdot\{2\cdot[3+(x-4)\cdot 5]:6\}\cdot 7=15$ este

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5

(5p) **3.** Numărul de numere naturale de trei cifre care au produsul cifrelor egal cu 6 este:

a) 2 b) 3 c) 8 d) 9

(5p) **4.** Câte numere naturale dau câtul 11 la împărţirea cu 2017?

a) 2015 b) 2016 c) 2017 d) 10

(5p) **5.** Dacă împărţim numărul natural n la 56 obţinem restul 37. Restul împărţirii lui n la 14 este:

a) 5 b) 7 c) 9 d) 11

(5p) **6.** Numărul $\left[3^{121}:9^{60}+\left(5^3\right)^2:\left(5^2\right)^2\right]:2^2\cdot 3-3$ este:

a) 3 b) 13 c) 18 d) 20

(5p) **7.** Ultima cifră a numărului $103^{100}+37^{10}+42^{53}+24^{31}$ este

a) 0 b) 2 c) 4 d) 6

(5p) **8.** Dacă $S=1+7+7^2+7^3+...+7^{100}$ atunci numărul $6\cdot S+1$ este:

a) 7^{102} b) 7^{101} c) $7^{101}-6$ d) $7^{102}-6$

La problemele 9 şi 10 redactaţi rezolvările complete.

9. Se consideră numărul $n=1234567891011...99100$

(20p) a) Câte cifre are numărul n?

(10p) b) Să se suprime 100 de cifre din numărul n, astfel încât numărul rămas să fie cât mai mare posibil.

(20p) **10.** Determinaţi numărul tripletelor (m,n,p), de numere naturale distincte astfel încât $653<5^m+5^n+5^p<809$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 2 ore.

SUCCES!

CONCURSUL „ARGUMENT”

11 noiembrie 2017

CLASA a V-a

Soluţii

1	2	3	4	5	6	7	8
b	c	d	c	c	c	d	b

9. a) Împărţim cifrele numărului n în grupe ca şi mai jos:

$n=123456789|1011...19|2021...29|...|9091...99|100$

Atunci n are $9+\underbrace{20+20+...+20}_{9\,\text{de}\,20}+3=192$ cifre.

b) Pentru ca numărul rămas să fie cât mai mare va trebui să eliminăm cifre astfel încât primele cifre ale numărului rămas să fie cât mai mari, deci cifre de 9.

În secvenţa $1234567891011...4849$ sunt 9+20+20+20+20=89 cifre, din care avem cinci cifre de 9. Păstrăm aceste cifre de 9 şi eliminăm celelalte 84 de cifre, obţinând numărul $n_1=99999505152...565758...99100$.

În secvenţa $505152...5657$ sunt 16 cifre, deci vom elimina primele 15 cifre (fiecare astfel de cifră este mai mica ca 7) şi mai eliminăm cifra 5 ce urmează după 7 pentru ca numărul rămas să fie maxim.

Aşadar, se elimină primele 84 de cifre diferite de 9 din numărul n, apoi primele 15 cifre din secvenţa 5051525354555657 şi următoarea cifră de 5 după 7.

Numărul rămas care respectă condiţia din enunţ este

$n_2=9999978596061...99100$.

10. Schimbând numerele m,n,p între ele relaţia din ipoteză nu se modifică. De aceea putem presupune că m < n < p.

Cum $5^5=3125>809$ deducem că numerele m,n,p sunt mai mici decât 5. Prin urmare $0\le m<n<p\le 4$; (1)

Din (1) deducem că $n\ge 1 \text{ si } p\ge 2$ deci p poate fi 2, 3 sau 4.

Analizăm cazurile:

i) p=2; $5^m+5^n+5^p=5^0+5^1+5^2=31<653$, nu convine

ii) p=3; $5^m+5^n+5^p\le 5^1+5^2+5^3=155<653$, nu convine

iii) p=4; deci $n\le 3 \text{ si } m\le 2$

- pentru m=0 => $653<1+5^n+5^4<809 \Leftrightarrow 27<5^n<183 \Rightarrow n=3 \text{ solutie}$

Prin urmare $(m,n,p)=(0,3,4)\text{solutie};$ (2)

- pentru m=1 => $653<5+5^n+5^4<809 \Leftrightarrow 23<5^n<179 \Rightarrow n=3 \text{ si } n=2 \text{ convin}$

Prin urmare $(m,n,p)=(1,3,4)\text{sau}\,(1,2,4)\text{solutii};$ (3)

- Pentru m=2 => $653<5^2+5^n+5^4<809 \Leftrightarrow 3<5^n<159 \overset{n>m}{\Rightarrow} n=3$

Prin urmare $(m,n,p)=(2,3,4)\text{solutie};$ (4)

Deoarece tripletul $(m,n,p)=(0,3,4)$ generează următoarele 6 soluţii: $(0,3,4);(0,4,3);(3,0,4);(3,4,0);(4,0,3);(4,3,0)$ folosind şi relaţiile (3),(4) găsim că există 24 de triplete care verifică condiţia din enunţ.