CONCURSUL „ARGUMENT”
Baia Mare, 7 noiembrie 2015

CLASA a VI-a

La problemele 1 – 8 se scriu pe foaia de concurs doar literele corespunzătoare răspunsului considerat corect. Fiecare problemă are un singur răspuns corect.

(5p) **1.** Cel mai mare număr natural de forma $\overline{x29y}$ divizibil cu 15 este:

a) 7290 b) 8295 c) 8925 d) 9295

(5p) **2.** Dacă a şi b sunt numere prime şi $a+33b=440$, atunci b are valoarea:

a) 13 b) 17 c) 19 d) 23

(5p) **3.** Dacă $3^{2n}=\left(27\cdot 3^{2016}\right):\left(9\cdot 3^{2011}\right)$, atunci numărul n este egal cu:

a) 3 b) 6 c) 4032 d) 4

(5p) **4.** Numărul soluţiilor în numere naturale ale ecuaţiei $(x+3)\cdot(2y+1)=120$ este:

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5

(5p) **5.** Numărul $\left(3^5\cdot 5^3\right)^4:(9\cdot 5)^9-3^{11}:3^9$ este egal cu:

a) 1125 b) 1116 c) 1119 d) 116

(5p) **6.** Ultimele trei cifre ale numărului $2^{104}+2^{103}+2^{100}$ sunt:

a) 200 b) 400 c) 500 d) 800

(5p) **7.** Punctele A,B,C,D sunt coliniare, în această ordine.Dacă $3AC=AB+2AD$, iar $BC=2016$, atunci lungimea segmentului (DC) este:

a) 2016 b) 6048 c) 1008 d) 672

(5p) **8.** Cel mai mare număr de forma $\overline{abab}$, cu număr minim de divizori, este:

a) 9999 b) 9898 c) 9797 d) 9696

La următoarele probleme se cer soluţiile complete, care se trec pe foaia de concurs.

9. O mulţime $A=\{1,2,3,4,...,2n\}$, $n\in\mathbb{N}^*$, se numeşte *cubică* dacă ea poate fi scrisă ca reuniune de n submulţimi disjuncte două câte două astfel încât suma elementelor fiecărei submulţimi să fie cub perfect.

(10p) a) Să se arate că mulţimea $A=\{1,2,3,4,...,26\}$ este cubică;

(10p) b) Să se arate că mulţimea $B=\{1,2,3,4,5,6\}$ nu este cubică.

(10p) c) Să se arate că mulţimea $C=\{1,2,3,4,...,603,604\}$ este cubică.

10. Pe o dreaptă se consideră punctele $O, A_1, A_2, ..., A_{2015}$, în această ordine, astfel încât

$$OA_1=1\,cm,\ A_1A_2=3cm,\ A_2A_3=3^2\,cm,...,A_{2014}A_{2015}=3^{2014}\,cm.$$

(5p) a) Să se determine lungimea segmentului OA_{2015};

(5p) b) Să se determine segmentul de lungime 9720 cm, având capetele în două din punctele considerate.

(10p) c) Să se arate că există cel puţin 1009 segmente având capetele printre punctele date şi care au lungimea exprimată printr-un pătrat perfect.

Subiectele au fost selectate şi propuse de către:
prof. Gheorghe Boroica – Colegiul Naţional „Gheorghe Şincai”

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 2 ore.
SUCCES!

CONCURSUL „ARGUMENT”

7 noiembrie 2015

CLASA a VI-a

Soluţii

1	2	3	4	5	6	7	8
b	a	a	c	b	b	c	c

9. a) A este reuniunea submulţimilor $\{1,26\},\{2,25\},\{3,24\},...,\{13,14\}$

b) Dacă B ar fi cubică, cum 1 se află în una din cele trei submulţimi şi $1+b$ nu e cub perfect pentru niciun $b\in B$, se obţine o contradicţie. Se arată că o submulțime ce conține doar elementul 1 nu convine.

c) Se caută submulţimi de forma $\{a,k^3-a\}$.

Se poate lua partiţia formată din submulţimile

$\{1,124\},\{2,123\},\{3,122\},...,\{62,63\}$ (suma elementelor este 5^3) şi

$\{125,604\},\{126,603\},\{127,602\},...,\{364,365\}$ (suma elementelor este 9^3)

10.a) $OA_{2015}=1+3+3^2+...+3^{2014}=\dfrac{3^{2015}-1}{2}$.

b) $A_iA_j=OA_j-OA_i=\dfrac{3^j-1}{2}-\dfrac{3^i-1}{2}=\dfrac{3^j-3^i}{2}, i<j$.

Relaţia $A_iA_j=9720\Leftrightarrow 3^i\left(3^{j-i}-1\right)=2^4\cdot3^5\cdot5$.

Se obţine $i=5, j=9$. Atunci segmentul A_5A_9 are proprietatea cerută.

c) Se observă că $A_{2k}A_{2k+2}=3^{2k}+3^{2k+1}=\left(2\cdot3^k\right)^2, k=\overline{0,1006}$.

Aceste 1007 segmente $A_0A_2=OA_2, A_2A_4, A_4A_6,..., A_{2012}A_{2014}$ au proprietatea cerută.

Cum $OA_1=1cm, OA_4=121cm$, folosind rezultatul anterior , se obţine concluzia.