Concursul Interjudețean de Matematică “Argument”

Colegiul Național “Gheorghe Șincai” Baia-Mare

Ediția a VIII-a, 2016

Clasa a XII-a

Soluții

Problema 1. Să se determine funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ care verifică inegalitatea:

$$\left|f(x+y)-f(x-y)-2y\right|\le y^2,\quad \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Vasile Pop, Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

Soluție. Scriem relația sub forma:

$$\left|(f(x+y)-(x+y))-(f(x-y)-(x-y))\right|\le y^2,\quad \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Cu substituția $f(x)-x=g(x)$, $x\in\mathbb{R}$ obținem pentru funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ relația:

$$\left|g(x+y)-g(x-y)\right|\le y^2,\quad \forall\ x,y\in\mathbb{R}.$$

Pentru $y\neq 0$ avem:

$$\left|\frac{g(x+y)-g(x-y)}{2y}\right|\le\left|\frac{y}{2}\right|,\quad \forall x\in\mathbb{R},\ \forall y\neq 0.$$

Rezultă că

$$\lim_{y\to 0}\frac{g(x+y)-g(x-y)}{2y}=0,\quad \forall x\in\mathbb{R}$$

deci funcția g este derivabilă în $x\in\mathbb{R}$ și $g'(x)=0$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Astfel, $g(x)=c$, $\forall x\in\mathbb{R}$, ($c\in\mathbb{R}$ constant), deci $f_c(x)=x+c$, $x\in\mathbb{R}$ sunt toate funcțiile care verifică inegalitatea dată. ■

Problema 2. Spunem că o funcție $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ are proprietatea (P) dacă este continuă și verifică relația:

$$f(x)\cdot f(f(x))=1,\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

a). Să se arate că există o infinitate de funcții cu proprietatea (P).

b). Dacă f este o funcție cu proprietatea (P) și $f(2017)=2016$, se pot deduce valorile $f(2015)$ și $f(2018)$?

Vasile Pop, Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

Soluție. a). Pentru orice $a\in(0,1]$, funcția f_a:

$$f_a(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{a}, \text{ dacă } x<a\\ \dfrac{1}{x}, \text{ dacă } x\in\left[a,\dfrac{1}{a}\right]\\ a, \text{ dacă } x>\dfrac{1}{a}\end{cases}$$

are proprietatea (P). Într-adevăr, se verifică continuitatea iar $f_a(f_a(x))=\dfrac{1}{f_a(x)}$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$, observând că $\operatorname{Im} f_a=\left[a,\dfrac{1}{a}\right]$.

b). Din relația dată avem

$$f(x)\neq 0,\quad f(f(x))=\frac{1}{f(x)},\quad \forall x\in\mathbb{R}$$

astfel că

$$f(t)=\frac{1}{t},\quad \forall t\in\operatorname{Im} f$$

(f este unic determinată pe imaginea sa). Deoarece f este continuă, rezultă că $\operatorname{Im} f$ este un interval. În plus, $0\notin\operatorname{Im} f$, $2016=f(2017)\in\operatorname{Im} f$, deci $f(2016)=\dfrac{1}{2016}\in\operatorname{Im} f$. Prin urmare,

$$\left[\frac{1}{2016},2016\right]\subseteq\operatorname{Im} f\subseteq(0,\infty)$$

astfel că

$$2015\in\operatorname{Im} f\quad\text{și}\quad f(2015)=\frac{1}{2015}.$$

Vom arăta că $f(2018)$ nu este determinată de ipotezele problemei.

Este suficient să considerăm funcții f pentru care $\operatorname{Im} f=\left[\frac{1}{2016},2016\right]$, $f(x)=\frac{1}{x}$ pentru $x\in\left[\frac{1}{2016},2016\right]$, $f(2017)=2016$ iar f este continuă. Astfel, f va verifica proprietatea (P) și $f(2017)=2016$. Fie, spre exemplu:

$$f(x)=\begin{cases}2016, & \text{dacă } x<\frac{1}{2016}\\ \dfrac{1}{x}, & \text{dacă } x\in\left[\frac{1}{2016},2016\right]\\ ax+b, & \text{dacă } x\in[2016,2017]\\ h(x), & \text{dacă } x>2017\end{cases}$$

unde $a,b\in\mathbb{R}$ sunt astfel încât graficul funcției

$$g(x)=ax+b,\quad x\in[2016,2017]$$

este segmentul de dreaptă ce unește punctele $\left(2016, \dfrac{1}{2016}\right)$ și $(2017, 2016)$, iar

$$h : [2017, \infty) \to \left[\frac{1}{2016}, 2016\right]$$

poate fi orice funcție continuă astfel încât $h(2017) = 2016$. Astfel, $f(2018) = h(2018)$ care nu e determinată (poate fi orice valoare din intervalul $\left[\frac{1}{2016}, 2016\right]$ pe acest exemplu). ∎

Problema 3. Pe mulțimea $(0,\infty)$ se consideră o lege de compoziție internă " $*$ " cu proprietatea:

$$(x * y) \cdot (y * z) \cdot (z * x) = 1, \quad \forall x, y, z \in (0,\infty).$$

Să se studieze proprietățile acestei legi: comutativitate, asociativitate, element neutru.

Vasile Pop, Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

Soluție. Vom arăta mai întâi că pentru orice astfel de lege există o funcție $f : (0,\infty) \to (0,\infty)$ astfel ca

$$x * y = \frac{f(x)}{f(y)}, \quad \forall x, y \in (0,\infty).$$

Dacă în proprietatea din enunț punem $x = y = z$ obținem $(x * x)^3 = 1$ deci

$$x * x = 1, \quad \forall x \in (0,\infty). \tag{1}$$

Dacă în proprietatea din enunț punem $y = z$ obținem

$$(x * y) * (y * x) = 1 \quad \text{deci} \quad y * x = \frac{1}{x * y}. \tag{2}$$

Dacă în proprietatea din enunț punem $z = 1$ obținem:

$$(x * y) \cdot (y * 1) \cdot (1 * x) = 1$$

deci

$$x * y = \frac{1}{(y * 1) \cdot (1 * x)} \overset{(2)}{=} \frac{x * 1}{y * 1}. \tag{3}$$

Notând $f(x) = x * 1$ rezultă

$$x * y = \frac{f(x)}{f(y)}, \quad \forall x, y \in (0,\infty),$$

operație care verifică (1).

(*Comutativitate*): O pereche este comutativă dacă și numai dacă funcția f este constantă și atunci $x * y = 1$ pentru orice $x, y \in (0,\infty)$.

(*Asociativitate*): Operația este asociativă dacă și numai dacă

$$x * (y * z) = (x * y) * z, \quad \forall x, y, z \in (0,\infty) \Leftrightarrow \frac{f(x) \cdot f(z)}{f(y)} = \frac{f(x)}{f(y) \cdot f(z)}, \quad \forall x, y, z \in (0,\infty)$$
$$\Leftrightarrow (f(z))^2 = 1, \quad \forall z \in (0,\infty) \Leftrightarrow f = 1$$

și atunci singura operație asociativă este $x * y = 1$, $\forall x, y \in (0,\infty)$.

(*Element neutru*): Operația admite element neutru $\alpha \in (0,\infty)$ dacă și numai dacă

$$x * \alpha = \alpha * x = x, \quad \forall x \in (0,\infty) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{f(\alpha)} = \frac{f(\alpha)}{f(x)} = x, \quad \forall x \in (0,\infty).$$

Rezultă $(f(x))^2 = (f(\alpha))^2$, deci $f(x) = f(\alpha)$ și atunci

$$\frac{f(x)}{f(\alpha)} = 1 = x, \quad \forall x \in (0,\infty)$$

care este imposibilă, deci operația nu are element neutru. ∎

Problema 4. Pornind de la funcția

$$F_1 : (0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad F_1(x) = x(\ln x - 1), \quad \forall x > 0,$$

se definește șirul de funcții $(F_n)_{n\geq 1}$, $F_n : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ în care F_{n+1} este o primitivă a funcției F_n cu proprietatea

$$\lim_{x\to 0} F_{n+1}(x) = 0, \quad \forall n \geq 1.$$

Să se determine $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!F_n(1)}{\ln n}$.

Vasile Pop, Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

Soluție. Aplicând integrarea prin părți avem:

$$F_2(x) = \int F_1(x)\,\mathrm{d}x = \int x(\ln x - 1)\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}(\ln x - 1) - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\left(\ln x - 1 - \frac{1}{2}\right) + c$$

iar

$$\lim_{x\to 0} F_2(x) = c + \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\ln x - 1 - \frac{1}{2}}{x^{-2}} = c + \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-2x^{-3}} = c - \frac{1}{4}\lim_{x\to 0} x^2 = c$$

și din condiția dată se obține $c = 0$, deci

$$F_2(x) = \frac{x^2}{2}\left(\ln x - 1 - \frac{1}{2}\right).$$

Mai departe, procedând în mod similar, se obține că

$$F_3(x) = \frac{x^3}{6}\left(\ln x - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)$$

și prin inducție se demonstrează că, în general,

$$F_n(x) = \frac{x^n}{n!}\left(\ln x - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right)\right) \quad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N}^* \text{ și } x > 0.$$

Astfel,

$$F_n(1) = -\frac{1}{n!}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right)$$

și

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!F_n(1)}{\ln n} = -\lim_{n\to\infty}\frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}}{\ln n} \overset{Stolz}{=} -\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{\ln(n+1) - \ln n} = -\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}} = -\frac{1}{\ln \mathrm{e}} = -1.$$

■