COLEGIUL NAȚIONAL
GHEORGHE ȘINCAI
BAIA MARE

Concursul Interjudețean de Matematică "Argument"
Ediția a VIII-a, 11–12 noiembrie 2016

Clasa a XII-a

Problema 1. Să se determine funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifică inegalitatea:

$$|f(x+y) - f(x-y) - 2y| \leq y^2, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Problema 2. Spunem că o funcție $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are proprietatea (P) dacă este continuă și verifică relația:

$$f(x) \cdot f(f(x)) = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

a). Să se arate că există o infinitate de funcții cu proprietatea (P).
b). Dacă f este o funcție cu proprietatea (P) și $f(2017) = 2016$, se pot deduce valorile $f(2015)$ și $f(2018)$?

Problema 3. Pe mulțimea $(0, \infty)$ se consideră o lege de compoziție internă " $*$ " cu proprietatea:

$$(x * y) \cdot (y * z) \cdot (z * x) = 1, \quad \forall x, y, z \in (0, \infty).$$

Să se studieze proprietățile acestei legi: comutativitate, asociativitate, element neutru.

Problema 4. Pornind de la funcția

$$F_1 : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad F_1(x) = x(\ln x - 1), \quad \forall x > 0,$$

se definește șirul de funcții $(F_n)_{n \geq 1}$, $F_n : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ în care F_{n+1} este o primitivă a funcției F_n cu proprietatea

$$\lim_{x \to 0} F_{n+1}(x) = 0, \quad \forall n \geq 1.$$

Să se determine $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n! F_n(1)}{\ln n}$.

Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7.

Timp de lucru: 3 ore.

Succes!