Concursul Interjudețean de Matematică “Argument”

Colegiul Național “Gheorghe Șincai” Baia-Mare

Ediția a VIII-a, 2016

Clasa a XI-a

Soluții

Problema 1. Fie $f : \mathbb{Q}^* \to \mathbb{Q}^*$ o funcție cu proprietatea:

$$f\left(\frac{x}{f(y)}\right) = f(x) \cdot y, \quad \forall x, y \in \mathbb{Q}^*. \tag{1}$$

a) Să se arate că f este bijectivă și că

$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{Q}^*.$$

b) Să se dea exemplu de funcție $f : \mathbb{Q}^* \to \mathbb{Q}^*$ cu proprietatea (1).

Vasile Pop, Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

Soluție. Pentru $x = 1$, din (1) obținem:

$$f\left(\frac{1}{f(y)}\right) = f(1) \cdot y, \quad \forall y \in \mathbb{Q}^*. \tag{2}$$

Deoarece funcția

$$g : \mathbb{Q}^* \to \mathbb{Q}^*, \quad g(y) = f(1) \cdot y$$

este bijectivă rezultă că funcția f este injectivă și $\frac{1}{f}$ este surjectivă (de unde și f este surjectivă), astfel că f este bijectivă.

Pentru $y = 1$, din (1) obținem:

$$f\left(\frac{x}{f(1)}\right) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{Q}^*. \tag{3}$$

și cum f este injectivă rezultă că

$$f(1) = 1 \tag{4}$$

iar din (2) avem mai departe că

$$f\left(\frac{1}{f(x)}\right) = x, \quad \forall x \in \mathbb{Q}^*. \tag{5}$$

Dacă în (5) punem $f(x)$ în loc de x obținem

$$f\left(\frac{1}{f(f(x))}\right) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{Q}^*$$

adică, din injectivitate,

$$f(f(x)) = \frac{1}{x}, \quad \forall x \in \mathbb{Q}^*. \tag{6}$$

Acum, punem în (1), $f(y)$ în loc de y și din (6) obținem:

$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{Q}^*. \tag{7}$$

b) De observat mai întâi că dacă $f : \mathbb{Q}^* \to \mathbb{Q}^*$ verifică (6) și (7), atunci verifică și (1).

Mai întâi din (7) avem că $f(1) = \left(f(1)\right)^2$, deci $f(1) = 1$. Apoi, tot din (7),

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{f\left(x \cdot \frac{1}{x}\right)}{f(x)} = \frac{1}{f(x)}, \quad \forall x \in \mathbb{Q}^* \tag{8}$$

de unde, mai departe, rezultă că:

$$f\left(\frac{x}{f(y)}\right) = f(x) f\left(\frac{1}{f(y)}\right) = f(x)\cdot f\left(f\left(\frac{1}{y}\right)\right) \overset{(6)}{=} f(x)\cdot y \quad \forall x, y \in \mathbb{Q}^*.$$

Pornind de la această observație, căutăm funcții $f : \mathbb{Q}^* \to \mathbb{Q}^*$ ce verifică (6) și (7).

Pentru aceasta, este suficient să definim f pe mulțimea numerelor prime astfel încât (6) să se respecte, de unde mai departe (7) se folosește pentru a completa definiția pe $\mathbb{N}$ (prin reprezentarea numerelor naturale ca produse de factori primi), apoi pe $\mathbb{Q}_+^*$ folosind faptul că

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) f\left(\frac{1}{y}\right) \overset{(8)}{=} \frac{f(x)}{f(y)}, \quad \forall x, y \in \mathbb{Q}^*,$$

și mai departe pe $\mathbb{Q}^*$ folosind faptul că f este impară (din $1 = f(1) = f((-1)\cdot(-1)) = (f(-1))^2$ rezultă $f(-1) \in \{-1, 1\}$ și cum $f(1) = 1$ și f este injectivă rezultă $f(-1) = -1$ și apoi $f(-x) = f(-1)f(x) = -f(x)$, $\forall\ x \in \mathbb{Q}^*$).

Astfel, considerăm șirul numerelor prime: $p_1 = 2,\ p_2 = 3,\ p_3 = 5, \ldots$ și definim

$$f(1) = 1, \quad f(p_{2k-1}) = p_{2k}, \quad f(p_{2k}) = \frac{1}{p_{2k-1}}$$

ce verifică (6) pe mulțimea numerelor prime. ∎

Problema 2. Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ și $a, b \in \mathbb{C}$ astfel ca $a^2 \neq b^2$ și $a \cdot AB + b \cdot BA = I_2$. Să se arate că $(AB - BA)^2 = O_2$.

Vasile Pop, Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

Soluție. Avem relațiile

$$a(AB - BA) = I_2 - (a+b)BA, \tag{1}$$

$$b(BA - AB) = I_2 - (a+b)AB. \tag{2}$$

În relațiile (1) și (2) trecem la determinant. Avem:

$$\det(I_2 - (a+b)BA) = (a+b)^2 \det(BA - xI_2) = (a+b)^2 f_{BA}(x),$$

cu $x = \dfrac{1}{a+b}$ ($a + b \neq 0$ din ipoteză) iar

$$f_M(x) = x^2 - (\operatorname{Tr} M)x + \det M.$$

Analog,

$$\det(I_2 - (a+b)AB) = (a+b)^2 f_{AB}(x).$$

Dar $f_{AB} = f_{BA}$ deoarece

$$\operatorname{Tr}(AB) = \operatorname{Tr}(BA), \quad \det(AB) = \det(BA).$$

În concluzie,

$$\det(a(AB - BA)) = \det(b(BA - AB))$$

de unde, folosind (1) și (2), se obține

$$a^2 \det(AB - BA) = b^2 \det(AB - BA).$$

Deoarece $a^2 \neq b^2$ rezultă că $\det(AB - BA) = 0$ și în plus $\operatorname{Tr}(AB - BA) = 0$ astfel că aplicând Teorema Cayley-Hamilton pentru matricea $AB - BA$ obținem $(AB - BA)^2 = 0$. ■

Problema 3. Să se determine numărul permutărilor $\sigma \in S_n$ $(n \geq 3)$ cu proprietatea $\sigma^3 = e$ care au un număr minim de puncte fixe.

(e este permutarea identică: $e(k) = k$ pentru orice $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$;
$k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ se numește *punct fix* pentru o permutare $\sigma \in S_n$ dacă $\sigma(k) = k$)

Vasile Pop, Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

Dan Moldovan

Soluție. Dacă $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ nu este punct fix pentru permutarea σ, fie $j = \sigma(i) \neq i$. Atunci $\sigma(j) = k \neq i, j$ (altfel, dacă $\sigma(j) = i$, atunci $i = \sigma^3(i) = \sigma^2(j) = \sigma(i)$ – contradicție; similar, dacă $\sigma(j) = j$, atunci $i = \sigma^3(i) = \sigma^2(j) = j$ – contradicție). Mai departe, $\sigma(k) = \sigma^2(j) = \sigma^3(i) = i$. În concluzie, (i, j, k) formează un ciclu de lungime 3 pentru σ.

Pornind de la observația de mai sus, distingem următoarele cazuri:

a). Dacă $n = 3m$ $(m \in \mathbb{N}^*)$, atunci numărul minim de puncte fixe este 0, iar numerele din mulțimea $A = \{1, 2, \ldots, 3m\}$ se împart în m cicluri de către 3.

Fie N_m numărul acestor permutări. Pentru a genera toate aceste permutări, se procedează în felul următor: se alege din mulțimea $A \setminus \{1\}$ valoarea $i = \sigma(1)$ (sunt $3m - 1$ posibilități de alegere), și apoi $j = \sigma(i)$ din mulțimea $A \setminus \{1, i\}$ (sunt $3m - 2$ posibilități de alegere). Odată format primul ciclu de lungime 3 (cel care conține elementul 1), problema se reduce la a genera o permutare de același tip din mulțimea redusă $A \setminus \{1, i, j\}$ ce are $3(m - 1)$ elemente (procedând similar, începând cu cel mai mic element al mulțimii reduse), ceea ce se poate realiza în N_{m-1} moduri (**Observație:** ordinea în care se generează ciclurile nu este relevantă, însă se poate decide ca ele să fie ordonate, spre exemplu, după cel mai mic element al lor; doar în acest sens putem vorbi atunci de *primul ciclu*, al doilea ciclu, ș.a.m.d.). În concluzie,

$$N_m = (3m - 1)(3m - 2)N_{m-1} \quad \text{pentru orice } m \geq 2,$$

unde $N_1 = 2$, ceea ce în final conduce la formula

$$N_m = \frac{(3m)!}{(3m)!!!} = \frac{(3m)!}{3^m m!}, \quad m \geq 1.$$

b). Dacă $n = 3m + 1$ $(m \in \mathbb{N})$, atunci numărul minim de puncte fixe este 1, iar acesta poate fi ales în $3m + 1$ moduri. Odată ales punctul fix, restul de $3m$ elemente se se împart în m cicluri de către 3, ceea ce se poate realiza în N_m moduri (conform punctul anterior), cu convenția că $N_0 = 1$. Astfel, numărul permutărilor în acest caz va fi

$$\frac{(3m + 1)!}{3^m m!}.$$

c). Dacă $n = 3m + 2$ $(m \in \mathbb{N})$, atunci numărul minim de puncte fixe este 2, iar acestea pot fi alese în C_{3m+2}^2 moduri. Odată alese punctele fixe, restul de $3m$ elemente se se împart în m cicluri de către 3, ceea ce se poate realiza în N_m moduri. Astfel, numărul permutărilor în acest caz va fi

$$\frac{(3m + 2)!}{2 \cdot 3^m m!}.$$

■

Problema 4. Fie $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ fixat. Definim șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ prin

$$a_n = \{n\alpha\} + \{(n+1)\alpha\}, \quad n \geq 1$$

unde $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a numărului real x. Să se determine mulțimea punctelor limită pentru șirul (a_n) ($x \in \mathbb{R}$ se numește *punct limită pentru șirul* (a_n) dacă șirul are un subșir convergent la x).

Vasile Pop, Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

Bogdan Moldovan

Soluție. Fie $\beta = \{\alpha\} \in (0,1) \setminus \mathbb{Q}$. Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ avem

$$\begin{aligned} a_n &= \{n\alpha\} + \{(n+1)\alpha\} = \left\{n[\alpha] + n\beta\right\} + \left\{(n+1)[\alpha] + (n+1)\beta\right\} \\ &= \left\{n\beta\right\} + \left\{(n+1)\beta\right\} = \left\{n\beta\right\} + \left\{[n\beta] + \left\{n\beta\right\} + \beta\right\} = \left\{n\beta\right\} + \left\{\left\{n\beta\right\} + \beta\right\} = \left\{n\beta\right\} + \left(\left\{n\beta\right\} + \beta\right) - \left[\left\{n\beta\right\} + \beta\right] \\ &= 2\{n\beta\} + \beta - \begin{cases} 0, \text{ dacă } \left\{n\beta\right\} < 1-\beta \\ 1, \text{ dacă } \left\{n\beta\right\} \geq 1-\beta \end{cases}. \end{aligned}$$

Fie L mulțimea punctelor limită pentru șirul (a_n).

Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Dacă $(0 <) \left\{n\beta\right\} < 1-\beta$, atunci

$$a_n = 2\{n\beta\} + \beta \in (\beta, 2-\beta).$$

Dacă $(1 >) \left\{n\beta\right\} \geq 1-\beta$, atunci

$$a_n = 2\{n\beta\} + \beta - 1 \in [1-\beta, 1+\beta).$$

În concluzie,

$$a_n \in (\beta, 2-\beta) \cup [1-\beta, 1+\beta) \quad \forall n \geq 1$$

deci

$$L \subseteq [\beta, 2-\beta] \cup [1-\beta, 1+\beta].$$

Mai departe, din teorema lui Kronecker rezultă că pentru orice $x \in [0,1]$ există un subșir $\left(\left\{n_k\beta\right\}\right)_{k\geq 1}$ al lui $\left(\left\{n\beta\right\}\right)_{n\geq 1}$ convergent la x (termenii subșirului putând fi aleși fie toți mai mari ca x pentru $x \in [0,1)$, fie mai mici ca x pentru $x \in (0,1]$).

- Dacă $x \in (0, 1-\beta]$, fie $\left\{n_k\beta\right\} \to x$, $\left\{n_k\beta\right\} < x$ pentru orice $k \geq 1$. Atunci $\left\{n_k\beta\right\} < x \leq 1-\beta$ astfel că

  $$a_{n_k} = 2\left\{n_k\beta\right\} + \beta \to 2x + \beta$$

  deci $2x+\beta$ este punct limită. Așadar, $(\beta, 2-\beta] \subseteq L$.

- Dacă $x \in [1-\beta, 1)$, fie $\left\{n_k\beta\right\} \to x$, $\left\{n_k\beta\right\} > x$ pentru orice $k \geq 1$. Atunci $\left\{n_k\beta\right\} > x \geq 1-\beta$ astfel că

  $$a_{n_k} = 2\left\{n_k\beta\right\} + \beta - 1 \to 2x + \beta - 1$$

  deci $2x+\beta-1$ este punct limită. Așadar, $[1-\beta, 1+\beta) \subseteq L$.

- Dacă $x = 0$, atunci fie $\left\{n_k\beta\right\} \to 0$ și putem presupune din convergența la 0 că subșirul este astfel ales încât termenii săi sunt suficient de mici (mai mici ca $1-\beta > 0$). Astfel,

  $$a_{n_k} = 2\left\{n_k\beta\right\} + \beta \to \beta$$

  deci $\beta \in L$.

- Dacă $x = 1$, atunci fie $\{n_k\beta\} \to 1$ și putem presupune din convergența la 1 că subșirul este astfel ales încât termenii săi sunt suficient de mari (mai mari ca $1-\beta < 1$). Astfel,

$$a_{n_k} = 2\{n_k\beta\} + \beta - 1 \to 1 + \beta$$

deci $1+\beta \in L$.

În concluzie, $L = [\beta, 2-\beta] \cup [1-\beta, 1+\beta]$.

Dacă $\beta \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, atunci $\beta < 1-\beta < 1+\beta < 2-\beta$ iar $L = [\beta, 2-\beta]$. Dacă $\beta \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, atunci $1-\beta < \beta < 2-\beta < 1+\beta$, iar $L = [1-\beta, 1+\beta]$.

În final,

$$L = \begin{cases} [\{\alpha\}, 2-\{\alpha\}] & \text{dacă } \{\alpha\} \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \\ [1-\{\alpha\}, 1+\{\alpha\}] & \text{dacă } \{\alpha\} \in \left(\frac{1}{2}, 1\right) \end{cases}.$$

■