COLEGIUL NAȚIONAL
GHEORGHE ȘINCAI
BAIA MARE

Concursul Interjudețean de Matematică "Argument"
Ediția a VIII-a, 11–12 noiembrie 2016

Clasa a XI-a

Problema 1. Fie $f : \mathbb{Q}^* \to \mathbb{Q}^*$ o funcție cu proprietatea:

$$f\left(\frac{x}{f(y)}\right) = f(x) \cdot y, \quad \forall x, y \in \mathbb{Q}^*. \tag{1}$$

a) Să se arate că f este bijectivă și că

$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{Q}^*.$$

b) Să se dea exemplu de funcție $f : \mathbb{Q}^* \to \mathbb{Q}^*$ cu proprietatea (1).

Problema 2. Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ și $a, b \in \mathbb{C}$ astfel ca $a^2 \neq b^2$ și $a \cdot AB + b \cdot BA = I_2$. Să se arate că $(AB - BA)^2 = O_2$.

Problema 3. Să se determine numărul permutărilor $\sigma \in S_n$ $(n \geq 3)$ cu proprietatea $\sigma^3 = e$ care au un număr minim de puncte fixe.
(e este permutarea identică: $e(k) = k$ pentru orice $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$;
$k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ se numește *punct fix* pentru o permutare $\sigma \in S_n$ dacă $\sigma(k) = k$)

Problema 4. Fie $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ fixat. Definim șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ prin

$$a_n = \{n\alpha\} + \{(n+1)\alpha\}, \quad n \geq 1$$

unde $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a numărului real x. Să se determine mulțimea punctelor limită pentru șirul (a_n) ($x \in \mathbb{R}$ se numește *punct limită pentru șirul* (a_n) dacă șirul are un subșir convergent la x).

Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7.
Timp de lucru: 3 ore.

Succes!