COLEGIUL NAȚIONAL
GHEORGHE ȘINCAI
BAIA MARE

Concursul Interjudețean de Matematică "Argument"

Colegiul Național "Gheorghe Șincai" Baia-Mare

Ediția a VIII-a, 2016

CLASA A X-A

Soluții

Problema 1. Fie ABC un triunghi dreptunghic cu ipotenuza BC de lungime $n \in \mathbb{N}$. Pe ipotenuză se consideră punctele

$$B = A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{n+1} = C$$

care o împart în n părți egale de lungime 1, iar pe cercurile de diametre A_1A_2, $A_2A_3, \ldots$, A_nA_{n+1} se consideră punctele $M_1, M_2, \ldots, M_n$. Să se arate că dacă

$$A_1M_1 + A_2M_2 + \ldots + A_nM_n \geq AB,$$

atunci

$$M_1A_2 + M_2A_3 + \ldots + M_nA_{n+1} \leq AC.$$

Vasile Pop, Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

Soluție. În triunghiurile dreptunghice $A_iM_iA_{i+1}$ notăm

$$x_i = \widehat{M_iA_iA_{i+1}}$$

și avem

$$A_iM_i = \cos x_i, \quad A_{i+1}M_i = \sin x_i \qquad (i = \overline{1,n})$$

astfel că, din ipoteză,

$$\cos x_1 + \cos x_2 + \ldots + \cos x_n \geq AB. \tag{1}$$

Trebuie arătat că

$$\sin x_1 + \sin x_2 + \ldots + \sin x_n \leq AC. \tag{2}$$

Dacă prin absurd presupunem că

$$\sin x_1 + \sin x_2 + \ldots + \sin x_n > AC, \tag{3}$$

din (1) și (3) avem

$$AB(\cos x_1 + \cos x_2 + \ldots + \cos x_n) + AC(\sin x_1 + \sin x_2 + \ldots + \sin x_n) > AB^2 + AC^2 = n^2,$$

deci

$$(AB\cos x_1 + AC\sin x_1) + \ldots + (AB\cos x_n + AC\sin x_n) > n^2.$$

Dar

$$AB\cos x_i + AC\sin x_i \leq \sqrt{AB^2 + AC^2} = n, \; i = \overline{1,n}$$

și prin adunare suma din stânga este mai mică decât $n \cdot n = n^2$, contradicție. ∎

Problema 2. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și $z_1, z_2, \ldots, z_n$ numere complexe cu proprietatea

$$|z_i - 1| \le \frac{1}{2},\ \forall i = \overline{1,n}.$$

Să se arate că

$$\left|\sum_{i=1}^{n} z_i\right| \cdot \left|\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{z_i}\right| \ge \frac{3}{4}n^2.$$

Vasile Pop, Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

Soluție. Condiția $|z_i - 1| \le \frac{1}{2}$ arată că toate punctele z_i se află în discul de centru $z_0 = 1$ și rază $\frac{1}{2}$ care din origine se vede sub unghi de $60°$. Astfel, dacă $z_i = \rho_i(\cos t_i + i \sin t_i),\ i = \overline{1,n}$, atunci

$$t_i \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right],\ \cos t_i \ge \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Avem:

$$\left|\sum z_i\right| \ge \operatorname{Re}\left(\sum z_i\right) = \sum \rho_i \cos t_i \ge \frac{\sqrt{3}}{2}\sum \rho_i$$

$$\left|\sum \frac{1}{z_i}\right| \ge \operatorname{Re}\left(\sum \frac{1}{z_i}\right) = \sum \frac{1}{\rho_i}\cos(-t_i) \ge \frac{\sqrt{3}}{2}\sum \frac{1}{\rho_i}.$$

Astfel că

$$\left|\sum z_i\right| \cdot \left|\sum \frac{1}{z_i}\right| \ge \frac{3}{4}\sum \rho_i \cdot \sum \frac{1}{\rho_i} \ge \frac{3}{4}n^2.$$

Observație. Condiția esențială $\cos t_i \ge \frac{\sqrt{3}}{2}$ poate fi obținută și algebric prelucrând condiția $|z_i - 1| \le \frac{1}{2}$ sub forma

$$(z_i - 1)(\overline{z}_i - 1) \le \frac{1}{4} \Leftrightarrow z_i \cdot \overline{z}_i - (z_i + \overline{z}_i) + 1 \le \frac{1}{4}.$$

Variantă. Fie $z_1, z_2, \ldots, z_n$ numere complexe cu proprietatea

$$|z_i - 1| \le \frac{\sqrt{3}}{2},\ i = \overline{1,n}.$$

Să se arate că

$$\left|\sum_{i=1}^{n} z_i\right| \cdot \left|\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{z_i}\right| \ge \frac{n^2}{4}.$$

Soluție. Cercul cu centrul 1 și raza $\frac{\sqrt{3}}{2}$ conține toate punctele și se vede sub unghi de $120°$ astfel că

$$z_i = \rho_i(\cos t_i + i \sin t_i), \quad t_i \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right],$$

deci $\cos t_i \ge \frac{1}{2}$ și soluția merge analog cu prima. ∎

Problema 3. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție neinjectivă pentru care există o funcție injectivă $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ și o funcție $h:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ astfel ca

$$f(g(x)+y) = h(f(x), y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Să se arate că funcția f este periodică.

Vasile Pop, Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

Soluție. Funcția f fiind neinjectivă există $x_1 \neq x_2$ astfel încât $f(x_1) = f(x_2)$, de unde

$$h(f(x_1), y) = h(f(x_2), y), \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

astfel că

$$f(g(x_1)+y) = f(g(x_2)+y), \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Notând

$$T = g(x_2) - g(x_1) \neq 0 \quad (g \text{ este injectivă})$$

avem mai departe că

$$f(x+T) = f\left(g(x_2) + \underbrace{(x - g(x_1))}_{y}\right) = f\left(g(x_1) + \underbrace{(x - g(x_1))}_{y}\right) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

ceea ce arată că f este periodică. ∎

Problema 4. Fie $A \subset \mathbb{R}$ o mulțime cu cel puțin trei elemente și $f : A \to \mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|, \quad \forall x, y \in A.$$

Să se arate că există o funcție $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât

$$g(x) = f(x), \quad \forall x \in A \quad \text{și} \quad |g(x) - g(y)| = |x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Vasile Pop, Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

Soluție. Fie $a, b, c \in A$ distincte. Avem

$$f(a) - f(b) = \pm(a - b)$$
$$f(b) - f(c) = \pm(b - c)$$
$$f(c) - f(a) = \pm(c - a).$$

Prin adunare obținem $0 = \pm(a - b) \pm (b - c) \pm (c - a)$ și observăm că egalitatea este adevărată dacă și numai dacă semnele sunt la fel $+, +, +$ sau $-, -, -$ (spre exemplu, în cazul $+, +, -$ avem $a-b+b-c-c+a = 0 \Leftrightarrow a = c$ – fals; la fel se analizează și celelalte cazuri). Astfel,

$$f(x) - f(y) = x - y, \quad \forall x, y \in A \tag{1}$$

sau

$$f(x) - f(y) = -x + y, \quad \forall x, y \in A. \tag{2}$$

În cazul (1) definim funcția $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$g(x) = x + f(a) - a, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

În cazul (2) definim funcția $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$g(x) = -x + f(a) + a, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

■