COLEGIUL NAȚIONAL
GHEORGHE ȘINCAI
BAIA MARE

Concursul Interjudețean de Matematică "Argument"
Ediția a VIII-a, 11–12 noiembrie 2016

Clasa a X-a

Problema 1. Fie ABC un triunghi dreptunghic cu ipotenuza BC de lungime $n \in \mathbb{N}$. Pe ipotenuză se consideră punctele

$$B = A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{n+1} = C$$

care o împart în n părți egale de lungime 1, iar pe cercurile de diametre A_1A_2, $A_2A_3, \ldots$, A_nA_{n+1} se consideră punctele $M_1, M_2, \ldots, M_n$. Să se arate că dacă

$$A_1M_1 + A_2M_2 + \ldots + A_nM_n \geq AB,$$

atunci

$$M_1A_2 + M_2A_3 + \ldots + M_nA_{n+1} \leq AC.$$

Problema 2. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și $z_1, z_2, \ldots, z_n$ numere complexe cu proprietatea

$$|z_i - 1| \leq \frac{1}{2}, \ \forall i = \overline{1, n}.$$

Să se arate că

$$\left|\sum_{i=1}^{n} z_i\right| \cdot \left|\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{z_i}\right| \geq \frac{3}{4}n^2.$$

Problema 3. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție neinjectivă pentru care există o funcție injectivă $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ și o funcție $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel ca

$$f(g(x) + y) = h(f(x), y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Să se arate că funcția f este periodică.

Problema 4. Fie $A \subset \mathbb{R}$ o mulțime cu cel puțin trei elemente și $f : A \to \mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|, \quad \forall x, y \in A.$$

Să se arate că există o funcție $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât

$$g(x) = f(x), \quad \forall x \in A \quad \text{și} \quad |g(x) - g(y)| = |x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7.

Timp de lucru: 3 ore.

Succes!