Concursul Interjudeţean de Matematică “Argument”

Colegiul Naţional “Gheorghe Şincai” Baia-Mare

Ediţia a VIII-a, 2016

Clasa a IX-a

Soluţii

Problema 1. Fie a, b, c, d numere întregi. Să se arate că ecuaţia $x^2 + 2ax + b = y^2 + 2cy + d$ are o infinitate de soluţii $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dacă şi numai dacă $a^2 - c^2 = b - d$.

Vasile Pop, Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

Soluţie. Scriem ecuaţia sub forma

$$(x + a)^2 - (y + c)^2 = (a^2 - c^2) - (b - d).$$

Dacă $a^2 - c^2 = b - d$, atunci ecuaţia devine $(x + a)^2 = (y + c)^2$, deci $|x + a| = \left|y + c\right|$ care, evident, are o infinitate de soluţii în $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Dacă $a^2 - c^2 = b - d + k$, $k \in \mathbb{Z}^*$, atunci ecuaţia se scrie sub forma

$$(x + a - y - c)(x + a + y + c) = k$$

iar pentru fiecare descompunere a lui k:

$$k = pq, \quad p, q \in \mathbb{Z}$$

obţinem sistemul

$$\begin{cases} x - y + a - c = p \\ x + y + a + c = q \end{cases}$$

astfel că ecuaţia este echivalentă cu o familie finită de sisteme, fiecare cu un număr finit de soluţii, deci ecuaţia are un număr finit de soluţii $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. ■

Problema 2. Fie a, b numere naturale astfel ca $(a-1)^2 < b < a^2$ şi considerăm şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ definit prin relaţia de recurenţă:

$$x_{n+1} = ax_n + \left[\sqrt{b}x_n\right], \quad n \in \mathbb{N},\ x_0 \in \mathbb{N}^*.$$

Să se arate că există $p, q \in \mathbb{N}$ astfel ca

$$x_{n+1} = px_n - qx_{n-1}, \quad \forall n \geq 1.$$

Vasile Pop, Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

Soluţie. Din $(a-1)^2 < b < a^2$ rezultă că $a \geq 2$ şi b nu este pătrat perfect, deci $\sqrt{b}$ este număr iraţional, iar din relaţia de recurenţă rezultă că $(x_n)_{n\geq 0}$ este un şir de numere naturale nenule. În plus, $a - \sqrt{b} \in (0, 1)$.

Avem succesiv din relaţia de recurenţă:

$$x_n\sqrt{b} - 1 < x_{n+1} - ax_n = \left[x_n\sqrt{b}\right] < x_n\sqrt{b}$$

$$\left(a+\sqrt{b}\right)x_n - 1 < x_{n+1} < \left(a+\sqrt{b}\right)x_n$$

$$(a^2-b)x_n - \left(a-\sqrt{b}\right) < \left(a-\sqrt{b}\right)x_{n+1} < (a^2-b)x_n$$

$$ax_{n+1} - (a^2-b)x_n < \sqrt{b}x_{n+1} < ax_{n+1} - (a^2-b)x_n + \left(a-\sqrt{b}\right).$$

Din ultima relaţie rezultă că

$$\left[\sqrt{b}x_{n+1}\right] = ax_{n+1} - (a^2-b)x_n, \quad \forall n \geq 1,$$

sau

$$\left[\sqrt{b}x_n\right] = ax_n - (a^2-b)x_{n-1}, \quad \forall n \geq 1. \tag{1}$$

Înlocuind $\left[\sqrt{b}x_n\right]$ din (1) în relaţia de recurenţă obţinem:

$$x_{n+1} = 2ax_n - (a^2-b)x_{n-1}, \quad \forall n \geq 1, \tag{2}$$

deci $p = 2a$ şi $q = a^2 - b$.

Observaţii. • Ecuaţia caracteristică a recurenţei (2) este

$$r^2 - 2ar + a^2 - b = 0$$

cu rădăcinile $r_{1,2} = a \pm \sqrt{b}$, deci există $A, B \in \mathbb{R}$ astfel ca

$$x_n = A\left(a+\sqrt{b}\right)^n + B\left(a-\sqrt{b}\right)^n,\ n \in \mathbb{N}.$$

• Pentru $a = 3$ şi $b = 5$ obţinem:

$$x_n = 2^{n-1}F_{2n+3},\ n \geq 1,$$

unde $(F_n)_{n\geq 1}$ este şirul lui Fibonacci

$$F_1 = F_2 = 1,\ F_{n+1} = F_n + F_{n-1},\ \forall\ n \geq 2.$$

■

Problema 3. a). Să se determine unghiul A al triunghiului ABC în care este verificată relaţia:

$$a^2 = b^2 + c^2 + bc.$$

b). Fie x, y, z numere pozitive care verifică relaţiile:

$$x^2 + xy + y^2 = 1, \quad y^2 + yz + z^2 = 4, \quad z^2 + zx + x^2 = 5.$$

Să se determine suma $S = x^2 + y^2 + z^2$.

Vasile Pop, Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

Soluţie geometrică. a). Aplicând teorema cosinusului în triunghiul ABC pentru unghiul A

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

rezultă că $\cos A = -\frac{1}{2}$, deci unghiul A are $120°$.

b). O expresie de forma $p^2 + q^2 + \alpha pq$ cu $\alpha \in [-2, 2]$ conduce la o interpretare geometrică a teoremei cosinusului. În cazul nostru, dacă luăm un triunghi cu laturile x, y ce determină un unghi de $120°$, din prima relaţie rezultă că a treia latură (o notăm cu a) are mărimea 1.

Analog, un triunghi cu laturile y, z ce determină un unghi de $120°$ are a treia latură (b) de mărime $\sqrt{4} = 2$, iar un triunghi cu laturile z, x şi unghiul de $120°$ are a treia latură (c) de mărime $\sqrt{5}$.

Lipim cele trei triunghiuri obţinute anterior după laturile comune x, y, z şi deoarece $120° + 120° + 120° = 360°$ se formează un triunghi ABC cu laturile 1, 2 şi $\sqrt{5}$, care este triunghi dreptunghic ($1^2 + 2^2 = (\sqrt{5})^2$) (iar vârful comun O al celor trei triunghiuri lipite este punctul lui Torricelli-Fermat din care laturile lui ABC se văd sub unghiuri egale).

Scriem aria triunghiului ABC în două moduri:

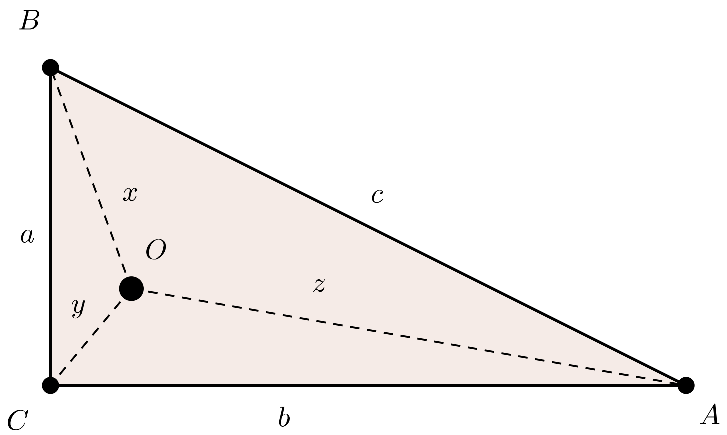
$$S_{ABC} = \frac{a \cdot b}{2} = 1 = \frac{xy\sin\widehat{BOC}}{2} + \frac{yz\sin\widehat{COA}}{2} + \frac{zx\sin\widehat{AOB}}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{4}(xy + yz + zx),$$

deci

$$xy + yz + zx = \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

Adunând relaţiile date obţinem

$$x^2 + y^2 + z^2 = 5 - \frac{2}{\sqrt{3}}.$$



■

Problema 4. Fie $\mathscr{A}$ o mulţime de $n \geq 2$ puncte în plan şi fie M un punct fixat.

Pentru orice submulţime nevidă $\mathscr{B} \subset \mathscr{A}$, se construieşte o dreaptă (notată cu $d_{\mathscr{B}}$) în felul următor: notăm cu $G_{\mathscr{B}}$ centrul de greutate al mulţimii $\mathscr{B}$, cu $G_{\overline{\mathscr{B}}}$ centrul de greutate al mulţimii $\overline{\mathscr{B}} = \mathscr{A} \setminus \mathscr{B}$, iar cu $M_{\mathscr{B}}$ simetricul lui M faţă de $G_{\mathscr{B}}$; dreapta $d_{\mathscr{B}}$ este $M_{\mathscr{B}} G_{\overline{\mathscr{B}}}$.

a). Să se arate că pentru orice $k = 1, 2, \ldots, n-1$, există un punct I_k în plan prin care trec toate dreptele $d_{\mathscr{B}}$, cu $\mathscr{B} \subset \mathscr{A}$, $|\mathscr{B}| = k$.

b). Să se arate că punctele I_k $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$ sunt coliniare.

Vasile Pop, Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

Soluţie. Fie $\mathscr{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ şi fie G centrul de greutate pentru $\mathscr{A}$.

Fie $\mathscr{B} = \left\{A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k}\right\} \subset \mathscr{A}$, $\overline{\mathscr{B}} = \mathscr{A} \setminus \mathscr{B} = \left\{A_{i_{k+1}}, A_{i_{k+2}}, \ldots, A_{i_n}\right\}$. Notăm cu $\overline{r_j}$ vectorul de poziţie al lui A_j, respectiv cu $\overline{r'_j}$ vectorul de poziţie al lui A_{i_j} $(j = 1, 2, \ldots, n)$. Evident, $\left\{\overline{r'_j} : j = 1, 2, \ldots, n\right\} = \left\{\overline{r_j} : j = 1, 2, \ldots, n\right\}$.

Atunci $\overline{r_{G_{\mathscr{B}}}} = \frac{1}{k}\left(\overline{r'_1} + \overline{r'_2} + \ldots + \overline{r'_k}\right)$,

$$\overline{r_{G_{\overline{\mathscr{B}}}}} = \frac{1}{n-k}\left(\overline{r'_{k+1}} + \overline{r'_{k+2}} + \ldots + \overline{r'_n}\right)$$

$\overline{r_M} + \overline{r_{M_{\mathscr{B}}}} = 2\overline{r_{G_{\mathscr{B}}}}$, deci

$$\overline{r_{M_{\mathscr{B}}}} = \frac{2}{k}\left(\overline{r'_1} + \overline{r'_2} + \ldots + \overline{r'_k}\right) - \overline{r_M}.$$

Orice punct de pe dreapta $d_{\mathscr{B}} = M_{\mathscr{B}} G_{\overline{\mathscr{B}}}$ este de forma $t \cdot \overline{r_{M_{\mathscr{B}}}} + (1-t)\overline{r_{G_{\overline{\mathscr{B}}}}}$, adică

$$\frac{2t}{k}\left(\overline{r'_1} + \overline{r'_2} + \ldots + \overline{r'_k}\right) + \frac{1-t}{n-k}\left(\overline{r'_{k+1}} + \overline{r'_{k+2}} + \ldots + \overline{r'_n}\right) - t \cdot \overline{r_M}.$$

Alegând t astfel încât

$$\frac{2t}{k} = \frac{1-t}{n-k}$$

(deci $t = \dfrac{k}{2n-k}$), se obţine punctul I_k cu vectorul de poziţie

$$\begin{aligned}\overline{r_{I_k}} &= \frac{2}{2n-k}\left(\overline{r'_1} + \overline{r'_2} + \ldots + \overline{r'_n}\right) - \frac{k}{2n-k}\overline{r_M} = \frac{2}{2n-k}\left(\overline{r_1} + \overline{r_2} + \ldots + \overline{r_n}\right) - \frac{k}{2n-k}\overline{r_M} \\ &= t_{n,k} \cdot \overline{r_G} + \left(1 - t_{n,k}\right)\overline{r_M}, \qquad \text{unde } t_{n,k} = \frac{2n}{2n-k}\end{aligned}$$

care, evident, nu depinde de alegerea lui $\mathscr{B}$, ci doar de G, M şi k. În plus, rezultă de aici că toate punctele I_k se află pe dreapta MG (cu observaţia că dacă $M = G$, atunci $I_k = G$ pentru orice k). ∎