COLEGIUL NAȚIONAL
GHEORGHE ŞINCAI
BAIA MARE

Concursul Interjudeţean de Matematică "Argument"
Ediţia a VIII-a, 11–12 noiembrie 2016

Clasa a IX-a

Problema 1. Fie a, b, c, d numere întregi. Să se arate că ecuaţia $x^2 + 2ax + b = y^2 + 2cy + d$ are o infinitate de soluţii $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dacă şi numai dacă $a^2 - c^2 = b - d$.

Problema 2. Fie a, b numere naturale astfel ca $(a-1)^2 < b < a^2$ şi considerăm şirul $(x_n)_{n \geq 0}$ definit prin relaţia de recurenţă:

$$x_{n+1} = ax_n + \left[x_n\sqrt{b}\right], \ n \in \mathbb{N}, \ x_0 \in \mathbb{N}^*.$$

Să se arate că există $p, q \in \mathbb{N}$ astfel ca

$$x_{n+1} = px_n + qx_{n-1}, \ \forall n \geq 1.$$

Problema 3. a). Să se determine unghiul A al triunghiului ABC în care este verificată relaţia:

$$a^2 = b^2 + c^2 + bc.$$

b). Fie x, y, z numere pozitive care verifică relaţiile:

$$x^2 + xy + y^2 = 1, \quad y^2 + yz + z^2 = 4, \quad z^2 + zx + x^2 = 5.$$

Să se determine suma $S = x^2 + y^2 + z^2$.

Problema 4. Fie $\mathcal{A}$ o mulţime de $n \geq 2$ puncte în plan şi fie M un punct fixat.
Pentru orice submulţime nevidă $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$, se construieşte o dreaptă (notată cu $d_{\mathcal{B}}$) în felul următor: notăm cu $G_{\mathcal{B}}$ centrul de greutate al mulţimii $\mathcal{B}$, cu $G_{\overline{\mathcal{B}}}$ centrul de greutate al mulţimii $\overline{\mathcal{B}} = \mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$, iar cu $M_{\mathcal{B}}$ simetricul lui M faţă de $G_{\mathcal{B}}$; dreapta $d_{\mathcal{B}}$ este $M_{\mathcal{B}}G_{\overline{\mathcal{B}}}$.
a). Să se arate că pentru orice $k = 1, 2, \ldots, n-1$, există un punct I_k în plan prin care trec toate dreptele $d_{\mathcal{B}}$, cu $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$, $|\mathcal{B}| = k$.
b). Să se arate că punctele I_k $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$ sunt coliniare.

Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7.
Timp de lucru: 3 ore.

Succes!