Revistă de matematică editată de Catedra de matematică
a Colegiului Naţional "Gheorghe Şincai", Baia Mare

Materialele spre publicare se vor trimite pe adresa:
Colegiul Naţional "Gheorghe Şincai", str. Gh. Şincai 25, Baia Mare
sau pe adresa de mail: musuroianicolae@yahoo.com;
dana.heuberger@yahoo.com
cu menţiunea *pentru revista Argument*
Revista va putea fi citită pe adresa *http://www.sincaibm.ro/*

ISSN 1582– 3660

Argument 18

Asupra unor şiruri

D.M. Bătineţu-Giurgiu şi Nicolae Muşuroia

Abstract. This article presents several extensions of the Traian Lalescu and Romeo T. Ianculescu famous sequences, published in Gazeta Matematică.

În Gazeta Matematică (G.M.), vol. VI (1900-1901), la pagina 148, marele matematician Traian Lalescu a propus problema 579 cu următorul enunţ:

Dacă $L_n = \sqrt[n+1]{(n+1)!} - \sqrt[n]{n!}$, $n \geq 2$, *să se calculeze* $\lim\limits_{n\to\infty} L_n$.

Câţiva ani mai târziu, în G.M., vol. XIX (1913-1914), la pagina 160, Romeo T. Ianculescu a propus problema 2042 cu următorul enunţ:

Dacă $I_n = (n+1)\sqrt[n+1]{n+1} - n\sqrt[n]{n}$, $n \geq 2$, *să se calculeze* $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

În G.M., anul XCIII (1988), la pagina 488, D.M. Bătineţu-Giurgiu şi Marius Şomodi propun problema C:884, cu următorul enunţ:

Fie $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ *şiruri de numere reale strict pozitive astfel încât* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = a \in \mathbb{R}_+^*$, $\lim\limits_{n\to\infty}(b_{n+1} - b_n) = b \in \mathbb{R}_+^*$, *atunci*

$$\lim_{n\to\infty}\left(b_{n+1}\sqrt[n+1]{a_{n+1}} - b_n\sqrt[n]{a_n}\right) = a \cdot b.$$

În G.M., anul XCIV (1989), la pagina 139, D.M. Bătineţu-Giurgiu propune problema C:890 cu enunţul:

Dacă $B_n = \dfrac{(n+1)^2}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}} - \dfrac{n^2}{\sqrt[n]{n!}}$, $n \geq 2$, *să se calculeze* $\lim\limits_{n\to\infty} B_n$.

În G.M. seria A, anul XI (1990), la pagina 23, D.M. Bătineţu-Giurgiu demonstrează că $\lim\limits_{x\to\infty}\left((\Gamma(x+2))^{\frac{1}{x+1}} - (\Gamma(x+1))^{\frac{1}{x}}\right) = \dfrac{1}{e}$, unde

$\Gamma : (0,\infty) \to (0,\infty)$, $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$ este funcţia lui Euler de speţa a doua.

În G.M. 2-3 din 1992, folosind criterii de aplicabilitate ale reciprocei teoremei Césaro-Stolz, D.M. Bătineţu-Giurgiu arată că:

dacă $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_{n+1}}{b_n} = a > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = c > 0$, *atunci*

$$\lim_{n\to\infty}\left((n+1)\sqrt[n+1]{(n+1)a_{n+1}}-n\sqrt[n]{n\cdot b_n}\right)=a(1+\ln c).$$

În numărul 3 al revistei Argument, Nicolae Muşuroia prezintă următoarea extindere a acestui rezultat: *dacă* $\lim_{n\to\infty} a_n = a\in\mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b>0$, $\lim_{n\to\infty} c_n = c\in\mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty} d_n = d>0$, *atunci*

$$\lim_{n\to\infty}\left((n+a_n)\sqrt[n+1]{(n+1)b_n}-(n+c_n)\sqrt[n]{n\cdot d_n}\right)=\ln\frac{b}{d}+a-c.$$

În sfârşit, în G.M. 7-8/1992, D.M. Bătineţu-Giurgiu prezintă următoarea generalizare a problemei lui R.T. Ianculescu:

$$\lim_{n\to\infty}\left((n+k)\sqrt[n+k]{n+k}-(n+m)\sqrt[n+m]{n+m}\right)=k-m,$$

unde $k,m\in\mathbb{N}$, $k>m$, iar în revista Argument numărul 3, Nicolae Muşuroia prezintă extinderea: *dacă* $\lim_{n\to\infty} a_n = a\in\mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b\in\mathbb{R}$, $k,m\in\mathbb{N}$, *atunci*

$$\lim_{n\to\infty}\left((n+a_n)\sqrt[n+k]{n+a_n}-(n+b_n)\sqrt[n+m]{n+b_n}\right)=a-b.$$

Cu ocazia împlinirii a 115 ani de la publicarea problemei lui Traian Lalescu şi a 103 ani de la publicarea problemei lui Romeo T. Ianculescu, ne face plăcere să nominalizăm pe cei care au avut o contribuţie valoroasă pe această temă, colaboratori ai Gazetei Matematice sau ai unor reviste de prestigiu din ţară şi străinătate, unde au fost publicate generalizări şi extinderi, metode noi de abordare a problemelor de acest tip.
Menţionăm aici pe: D.M. Bătineţu-Giurgiu, Maria Bătineţu-Giurgiu, Marcel Ţena, Mihaly Bencze, Marius Şomodi, Ovidiu Pop, Neculai Stanciu, Traian Ianculescu, Nicuşor Zlota, Nicoale Muşuroia, Kee-Wai Lau (Hong Kong, China), Michael Bataille (Franţa), Anastasios Kotronis (Grecia), Moti Levy (Israel), Paolo Perfetti (Italia), Omran Kouba (Siria), Angel Plaza (Spania), P.P. Dalyai (Ungaria), Arkady Alt (U.S.A), etc.

În această notă prezentăm câteva extinderi ale rezultatelor prezentate mai sus.

Teorema 1. *Dacă $t\in[0,\infty)$ şi $(a_n)_{n\geq 1}$ este un şir de numere reale strict pozitive, astfel încât* $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{na_n}=a>0$, *atunci:*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^{t+1}}{\sqrt[n+1]{a_{n+1}^t}}-\frac{n^{t+1}}{\sqrt[n]{a_n^t}}\right)=\frac{e^t}{a^t}.$$

Demonstraţie. Aplicând criteriul Cauchy-D'Alembert, obţinem:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{a_n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^n}{a_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{a_{n+1}}\cdot\frac{a_n}{n^n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot a_n}{a_{n+1}}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}=\frac{e}{a}\,.$$

Dacă

$$u_n=\frac{(n+1)^{t+1}}{\sqrt[n+1]{a_{n+1}^t}}\cdot\frac{\sqrt[n]{a_n^t}}{n^{t+1}}=\left(\frac{n+1}{\sqrt[n+1]{a_{n+1}}}\right)^t\left(\frac{\sqrt[n]{a_n}}{n}\right)^t\cdot\frac{n+1}{n}\,,\ n\geq 2,$$

atunci $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\left(\frac{e}{a}\right)^t\left(\frac{a}{e}\right)^t=1$ şi

$$\lim_{n\to\infty}u_n^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)^t\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n(t+1)}\sqrt[n+1]{a_{n+1}^t}$$
$$=e^{t+1}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{na_n}{a_{n+1}}\right)^t\left(\frac{\sqrt[n+1]{a_{n+1}}}{n+1}\right)^t\left(\frac{n+1}{n}\right)^t$$
$$=e^{t+1}\cdot\frac{1}{a^t}\left(\frac{a}{e}\right)^t\cdot 1=e.$$

Atunci

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^{t+1}}{\sqrt[n+1]{a_{n+1}^t}}-\frac{n^{t+1}}{\sqrt[n]{a_n^t}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{t+1}}{\sqrt[n]{a_n^t}}(u_n-1)$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{t+1}}{\sqrt[n]{a_n^t}}\cdot\frac{u_n-1}{\ln u_n}\ln u_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{\sqrt[n]{a_n^t}}\right)^t\frac{u_n-1}{\ln u_n}\ln u^n$$
$$=\frac{e^t}{a^t}\cdot 1\cdot\ln e=\frac{e^t}{a^t}\,,\quad \text{q.e.d.}$$

Dacă $t=1$ şi $a_n=n!$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{n\cdot a_n}=1$, deci

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^2}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}-\frac{n^2}{\sqrt[n]{n!}}\right)=e,$$

adică $\lim\limits_{n\to\infty}B_n=e$.

Teorema 2. *Dacă $t \in (0,\infty)$ şi $(a_n)_{n\geq 1}$ este un şir de numere reale strict pozitive, astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{na_n} = a \in (0,\infty)$, atunci*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n+1]{a_{n+1}^{t+1}}}{(n+1)^t} - \frac{\sqrt[n]{a_n^{t+1}}}{n^t}\right) = \frac{a^{t+1}}{e^{t+1}}.$$

Demonstraţie. Dacă

$$v_n = \frac{\sqrt[n+1]{a_{n+1}^{t+1}}}{(n+1)^t}\cdot\frac{n^t}{\sqrt[n]{a_n^{t+1}}} = \left(\frac{\sqrt[n+1]{a_{n+1}}}{n+1}\right)^{t+1}\left(\frac{n}{\sqrt[n]{a_n}}\right)^{t+1}\frac{n+1}{n},$$

atunci $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \left(\frac{a}{e}\right)^{t+1}\cdot\left(\frac{e}{a}\right)^{t+1} = 1$ şi

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} v_n^n &= \lim\left(\frac{n}{n+1}\right)^{nt}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^{t+1}\frac{1}{\sqrt[n+1]{a^{n+1}}}\\ &= \frac{1}{e^t}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{na_n}\right)^{t+1}\left(\frac{n+1}{\sqrt[n+1]{a_{n+1}}}\right)^{t+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{t+1}\\ &= \frac{1}{e^t}\cdot a^{t+1}\cdot\frac{e^{t+1}}{a^{t+1}}\cdot 1 = e,\end{aligned}$$

deci
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n+1]{a_{n+1}^{t+1}}}{(n+1)^t} - \frac{\sqrt[n]{a_n^{t+1}}}{n^t} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{a_n^{t+1}}}{n^t}(v_n-1)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{a_n^{t+1}}}{n^t}\cdot\frac{v_n-1}{\ln v_n}\ln v_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a_n}}{n}\right)^{t+1}\cdot\frac{v_n-1}{\ln v_n}\ln v_n^n$$
$$= \frac{a^{t+1}}{e^{t+1}}\cdot 1\cdot\ln e = \frac{a^{t+1}}{e^{t+1}}.$$

Pentru $t=0$, $a_n = n!$, obţinem $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n+1]{(n+1)!} - \sqrt[n]{n!}\right) = \frac{1}{e}$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} L_n = \frac{1}{e}$.

Teorema 3. *Dacă $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ sunt şiruri de numere reale strict pozitive, astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = a \in \mathbb{R}_+^*$, $\lim\limits_{n\to\infty}(b_{n+1}-b_n) = b \in \mathbb{R}_+^*$, iar $k\in\mathbb{N}^*$, $m\in\mathbb{N}$, atunci:*

$$\lim_{n\to\infty}\left(b_{n+1}\sqrt[n+k]{a_{n+1}} - b_n\sqrt[n+m]{a_n}\right) = a\cdot b.$$

Demonstraţie. Conform teoremei Cauchy-D'Alembert avem $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = a$, iar conform teoremei Césaro-Stolz,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}-b_n}{(n+1)-n} = \lim_{n\to\infty}(b_{n+1}-b_n) = b.$$

Deci

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n+k]{a_n} = \lim_{n\to\infty}a_n^{\frac{1}{n+k}} = \lim_{n\to\infty}\left(a_n^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{n}{n+k}} = a$$

şi

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n+k} = \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n}\cdot\frac{n}{n+k} = b.$$

Atunci

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left(b_{n+1}\sqrt[n+k]{a_{n+1}} - b_n\sqrt[n+m]{a_n}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(b_n\sqrt[n+k]{a_{n+1}} - b_n\sqrt[n+m]{a_n} + b_{n+1}\sqrt[n+k]{a_{n+1}} - b_n\sqrt[n+k]{a_{n+1}}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(b_n\left(\sqrt[n+k]{a_{n+1}} - \sqrt[n+m]{a_n}\right) + (b_{n+1}-b_n)\sqrt[n+k]{a_{n+1}}\right)\\
&= 0 + a\cdot b = a\cdot b,
\end{aligned}$$

deoarece $\lim\limits_{n\to\infty}(b_{n+1}-b_n)\sqrt[n+k]{a_{n+1}} = b\cdot a$, iar

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} b_n\left(\sqrt[n+k]{a_{n+1}} - \sqrt[n+m]{a_n}\right) &= \lim_{n\to\infty} b_n\sqrt[n+m]{a_n}\left(\frac{\sqrt[n+k]{a_{n+1}}}{\sqrt[n+m]{a_n}} - 1\right)\\
&= \lim_{n\to\infty} b_n\sqrt[n+m]{a_n}\,\frac{e^{\ln\frac{\sqrt[n+k]{a_{n+1}}}{\sqrt[n+m]{a_n}}}-1}{\ln\frac{\sqrt[n+k]{a_{n+1}}}{\sqrt[n+m]{a_n}}}\cdot\ln\frac{\sqrt[n+k]{a_{n+1}}}{\sqrt[n+m]{a_n}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\sqrt[n+m]{a_n}\,\frac{e^{\ln\frac{\sqrt[n+k]{a_{n+1}}}{\sqrt[n+m]{a_n}}}-1}{\ln\frac{\sqrt[n+k]{a_{n+1}}}{\sqrt[n+m]{a_n}}}\left(\frac{b_n}{n+k}\ln a_{n+1} - \frac{b_n}{n+m}\ln a_n\right)\\
&= 1\cdot 1(b\ln a - b\ln a) = 0.
\end{aligned}$$

Pentru $k=1$ şi $m=0$, din teorema 3, regăsim problema C:844. Dacă în plus luăm şi $a_n = b_n = n$, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, obţinem $\lim\limits_{n\to\infty}\left((n+1)\sqrt[n+1]{n+1} - n\sqrt[n]{n}\right) = 1$, adică $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 1$.

Teorema 4. Dacă $t \in \mathbb{R}_+$, atunci

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(\Gamma(x+2))^{\frac{t+1}{x+1}}}{(x+1)^t}-\frac{(\Gamma(x+1))^{\frac{t+1}{x}}}{x^t}\right)=\frac{1}{e^{t+1}}\,.$$

Demonstraţie. Avem:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(\Gamma(x+1))^{\frac{1}{x}}}{x}=\lim_{\substack{n\to\infty\\ n\in\mathbb{N}^*}}\frac{(\Gamma(n+1))^{\frac{1}{n}}}{n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{n!}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\frac{1}{e}\,.$$

Dacă $u:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}_+^*$,

$$u(x)=\frac{(\Gamma(x+1))^{\frac{t+1}{x+1}}}{(x+1)^t}\cdot\frac{x^t}{(\Gamma(x+1))^{\frac{t+1}{x}}}$$
$$=\left(\frac{(\Gamma(x+2))^{\frac{1}{x+1}}}{x+1}\right)^{t+1}\left(\frac{x}{(\Gamma(x+1))^{\frac{1}{x}}}\right)^{t+1}\cdot\frac{x+1}{x}\,,$$

atunci $\lim\limits_{x\to\infty}u(x)=\left(\dfrac{1}{e}\right)^{t+1}\cdot e^{t+1}=1$ şi

$$\lim_{x\to\infty}(u(x))^x=\lim_{x\to\infty}\left(\left(\frac{\Gamma(x+2)}{\Gamma(x+1)}\right)^{t+1}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{xt}\left(\frac{1}{(\Gamma(x+2))^{\frac{1}{x+1}}}\right)^{t+1}\right)$$
$$=\frac{1}{e^t}\cdot e^{t+1}=e.$$

Prin urmare

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(\Gamma(x+2))^{\frac{t+1}{x+1}}}{(x+1)^t}-\frac{(\Gamma(x+1))^{\frac{t+1}{x}}}{x^t}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{(\Gamma(x+1))^{\frac{t+1}{x}}}{x^t}\,(u(x)-1)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\Gamma(x+1))^{\frac{t+1}{x}}}{x^t}\cdot\frac{u(x)-1}{\ln u(x)}\cdot\ln u(x)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(\Gamma(x+1))^{\frac{1}{x}}}{x}\right)^{t+1}\frac{u(x)-1}{\ln u(x)}\cdot\ln(u(x))^x=\frac{1}{e^{t+1}}\cdot\ln e=\frac{1}{e^{t+1}}\,,\ \text{q.e.d.}$$

Teorema 5. *Dacă* $t\in\mathbb{R}_+$, *atunci*

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x+1)^{t+1}}{((\Gamma(x+2))^{\frac{t}{x+1}}}-\frac{x^{t+1}}{(\Gamma(x+1))^{\frac{t}{x}}}\right)=e^t.$$

Demonstraţie. Dacă $v : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$,

$$v(x) = \left(\frac{x+1}{x}\right)^{t+1} \cdot \left(\frac{(\Gamma(x+1))^{\frac{1}{x}}}{(\Gamma(x+2))^{\frac{1}{x+1}}}\right)^t$$
$$= \left(\frac{x+1}{(\Gamma(x+2))^{\frac{1}{x+1}}}\right)^t \left(\frac{(\Gamma(x+1))^{\frac{1}{x}}}{x}\right)^t \frac{x+1}{x},$$

atunci $\lim\limits_{x\to\infty} v(x) = e^t \cdot \dfrac{1}{e^t} = 1$ şi din $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{v(x)-1}{\ln v(x)} = 1$ şi

$$\lim_{x\to\infty}(v(x))^x = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x+2)}\right)^t \cdot \left(\frac{x+1}{x}\right)^{t+1} \cdot (\Gamma(x+2))^{\frac{t}{x+1}}$$
$$= e^{t+1} \cdot \lim_{x\to\infty}\left(\frac{(\Gamma(x+1))^{\frac{1}{x+1}}}{x+1}\right)^t = e^{t+1} \cdot \frac{1}{e^t} = e.$$

Prin urmare

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x+1)^{t+1}}{(\Gamma(x+2))^{\frac{t}{x+1}}} - \frac{x^{t+1}}{(\Gamma(x+1))^{\frac{t}{x}}}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^{t+1}}{(\Gamma(x+1))^{\frac{t}{x}}} \cdot (v(x)-1)$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x^{t+1}}{((\Gamma(x+1))^{\frac{t}{x}}} \cdot \frac{v(x)-1}{\ln v(x)} \cdot \ln v(x)$$
$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{\Gamma(x+1)^{\frac{1}{x}}}\right)^t \cdot \frac{v(x)-1}{\ln v(x)} \ln(v(x))^x = e^t \cdot 1 \cdot \ln e = e^t.$$

Pentru $x = n \in \mathbb{N}^*$, în relaţia din Teorema 5, obţinem:

$$\left(\frac{(n+1)^{t+1}}{\Gamma(n+2)^{\frac{t}{n+1}}} - \frac{n^{t+1}}{(\Gamma(n+1))^{\frac{t}{n}}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^{t+1}}{\sqrt[n+1]{((n+1)!)^t}} - \frac{n^{t+1}}{\sqrt[n]{(n!)^k}}\right) = e^t.$$

Bibliografie

[1] Bătineţu M.D., *Şiruri*, Ed. Albatros, Bucureşti, 1979

[2] Bătineţu-Giurgiu M.D., Bătineţu-Giurgiu Maria, Bârchi-Damian I., Semenescu A., *Analiză Matematică. Probleme pentru clasa a XI-a*, Ed. MatrixROM, Bucureşti, 2003

[3] Bătineţu-Giurgiu M.D., *O altă metodă de determinare a limitei şirului lui Traian Lalescu*, G.M., anul XCV (1990), 37–41

[4] Bătineţu-Giurgiu M.D., Şomodi Marius, *O metodă elementară de determinare a limitei şirului lui Traian Lalescu*, G.M., Anul XCIV (1989), 81–82

[5] Bătineţu-Giurgiu M.D., *Asupra problemei* 2042, G.M. 7–8/1992, 238–239

[6] Muşuroia N., *În legătură cu o problemă a lui R.T. Ianculescu*, Argument nr. 3/2001, 21–24

[7] Muşuroia N., *On O.Q.* 1005, *On O.Q.* 1006, Octogon Mathematical Magazine, vol. 11, No. 2, 2003, 695–696

Profesor, Bucureşti

Profesor, Colegiul Naţional "Gheorghe Şincai", Baia Mare

Colectivul de redacţie al revistei Argument îi doreşte distinsului colaborator, ***Profesor Dumitru Bătineţu-Giurgiu****, multă sănătate şi putere de muncă la aniversarea vârstei de 80 de ani. Prezenţa elegantelor sale probleme în paginile revistei noastre ne onorează.*

Cu mult drag,

La mulţi ani!

În legătură cu criteriul raportului

Dan Bărbosu şi Radu Tîrsu

Abstract. In [1] Heuberger presented five solutions for computation the limit

$$l = \lim_{n\to\infty} \left(2-\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt[3]{2}\right)\dots\left(2-\sqrt[n]{2}\right).$$

The aim of this note is to give a more natural solution based on a nice generalization of the ratio criteria for sequences of real positive numbers, due to professor Ivan [2]. We also present another interesting application of the mentioned generalization.

Încep prin a demonstra următoarea generalizare a criteriului raportului pentru şiruri de numere reale, datorată lui Ivan [2], [3].

Teoremă. *Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şiruri de numere reale strict pozitive, cu proprietăţile*:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{a_k} = \infty$;

(ii) $(\exists)\, l = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{a_n}$, $l \in \mathbb{R}$.

Sunt adevărate afirmaţiile de mai jos:

(a) *dacă* $l < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$;

(b) *dacă* $l > 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

Demonstraţie. Din condiţia $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{a_n} = l \Rightarrow \forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, N = N(\varepsilon)$ a.i. $\forall\, n \geq N$ să aibă loc inegalităţile:

$$l - \varepsilon < \left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{a_n} < l + \varepsilon. \tag{$*$}$$

(a) Folosind inegalitatea $(*)$ din dreapta, în care alegem $\varepsilon > 0$ astfel ca $l + \varepsilon = q < 1$. Deducem că:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} < q^{\frac{1}{a_n}},\ \forall\, n \geq N. \tag{$**$}$$

Scriem acum inegalităţile $(**)$ începând cu $n = N$.
Înmulţindu-le membru cu membru, găsim:

$$x_n \leq x_N \cdot q^{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}}. \tag{$***$}$$

Cum $x_n > 0$ şi $q \in (0,1)$, din $(***)$ rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

(b) Raţionamentul analog, folosind inegalitatea $(*)$ din partea stângă.

Observaţia 1. Dacă $l = \infty$, evident $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Observaţia 2. În cazul în care $a_n = 1$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, se regăseşte criteriul raportului pentru şiruri de numere reale strict pozitive.

Aplicaţia 1. [1], [2]. Calculaţi:

$$l = \lim_{n\to\infty} \left(2 - \sqrt{2}\right)\left(2 - \sqrt[3]{2}\right)\ldots\left(2 - \sqrt[n]{2}\right).$$

Soluţie. Fie $x_n = \prod\limits_{k=2}^{n} \left(2 - \sqrt[k]{2}\right)$, $a_n = n$, $\forall\, n \geq 2$. Se ştie că

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} = \infty$$

şi de aici e imediat că $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{1}{a_k} = \infty$. Se observă uşor că

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(2 - \sqrt[n+1]{2}\right)^n = e^{-\ln 2} < \frac{1}{2} < 1.$$

Conform cu rezultatul din teoremă, obţinem $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Aplicaţia 2. [2] Calculaţi

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln 2}{\ln 3} \cdot \frac{\ln 4}{\ln 5} \cdots \frac{\ln 2n}{\ln(2n+1)}.$$

Soluţie. Fie $x_n = \prod\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\ln 2k}{\ln(2k+1)}$ şi $a_n = n \ln n$, $\forall\, n \geq 2$.

Se demonstrează uşor că $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{1}{a_k} = \infty$ (de exemplu aplicând teorema lui Lagrange funcţiei $f : [k, k+1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(\ln x)$, $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$).
Un calcul elementar conduce la

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\ln(2n+2)}{\ln(2n+3)}\right)^{n \ln n} = \frac{1}{\sqrt{e}} < 1.$$

Cu rezultatul din teoremă, rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Bibliografie

[1] Heuberger Dana, *Asupra unei probleme de admitere*, Argument nr. 17 (2015), 14–18

[2] Ivan M. (coordonator), *Teste grilă de matematică*, Admitere 2016, UT Press, Cluj-Napoca, 2016, problemele 326, 327, pag. 44

[3] Ivan M., *Problems in Calculus*, Mediamira Science Publisher 2003, Problem 4.21, pp. 25

Conf. univ. dr., Centrul Universitar Nord Baia Mare,
Universitatea Tehnică Cluj-Napoca
Profesor, Liceul Tehnologic Tismana, jud. Gorj

Argument 18

Teorema bisectoarei exterioare glisante

Petru Braica şi Dana Heuberger

Abstract. In this note we are going to give an interesting geometrical result, similar to the sliding angle bisector theorem, which uses the external angle bisector of a triangle.

În această notă vom da un rezultat de geometrie elementară similar teoremei bisectoarei glisante, în care este folosită bisectoarea exterioară a triunghiului.

Deoarece în unele cazuri vom face apel şi la noţiuni de calcul vectorial, reamintim un enunţ extrem de folositor, a cărui demonstraţie o puteţi vedea în [4]:

Lema 1. *Fie punctele distincte A, B, C, D şi $M \in AB \backslash \{B\}$, $N \in CD \backslash \{C\}$ astfel încât* $\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \dfrac{\overline{ND}}{\overline{NC}} = k \in \mathbb{R} \backslash \{1\}$. *Atunci,* $\overrightarrow{MN} = \dfrac{\overrightarrow{AD} - k \cdot \overrightarrow{BC}}{1-k}$.

Pentru fixarea ideilor, menţionăm, fără demonstraţie, enunţul teoremei bisectoarei glisante:

Teorema 1 (a bisectoarei interioare glisante).
Fie triunghiul ABC şi $C_1 \in (AB)$, $B_1 \in (AC)$, astfel încât $BC_1 = CB_1$. În aceste condiţii, dreapta determinată de mijloacele segmentelor (BC) şi (B_1C_1) este paralelă cu bisectoarea interioară a unghiului $\widehat{BAC}$ al triunghiului ABC sau coincide cu ea.

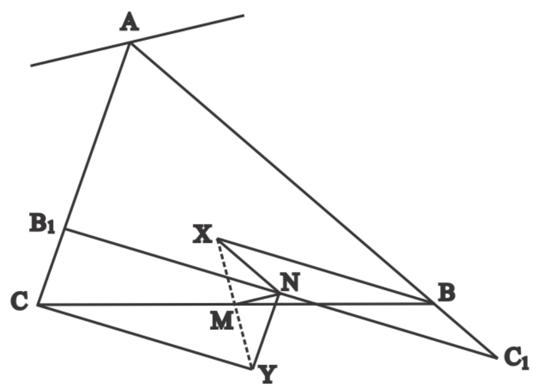
Dacă în loc de $C_1 \in (AB)$ considerăm simetricul lui C_1 faţă de B, obţinem:

Teorema 2 (a bisectoarei exterioare glisante).
Fie triunghiul ABC şi $C_1 \in AB$, $B_1 \in (AC)$, cu $B \in (AC_1)$, astfel ca $BC_1 = CB_1$. În aceste condiţii, dreapta determinată de mijloacele M şi N ale segmentelor (BC) şi (B_1C_1) este paralelă cu bisectoarea exterioară a unghiului $\widehat{BAC}$ al triunghiului ABC (deci este perpendiculară pe bisectoarea interioară a unghiului $\widehat{A}$.) Mai mult, $\overrightarrow{MN} = x \cdot \sin \dfrac{A}{2} \cdot \overrightarrow{b}$.

Demonstraţia 1. Construim paralelogramele C_1BXN şi CB_1NY. Rezultă că $(NX) \equiv (C_1B) \equiv (CB_1) \equiv (NY)$, deci ΔNXY este isoscel cu baza (XY). Din $(BX) \equiv (NC_1) \equiv (NB_1) \equiv (CY)$ şi $BX \| NC_1 = NB_1 \| CY$, avem imediat că $BXCY$ este un paralelogram de centru M, deci punctele X, M şi Y sunt coliniare.
În triunghiul isoscel NXY, (NM) este mediana corespunzătoare bazei, prin urmare $(NM$ este bisectoarea unghiului $\widehat{XNY}$. Unghiurile $\widehat{XNY}$ şi $\widehat{BAC}$ sunt suplementare,

căci:

$$\begin{aligned} m\left(\widehat{XNY}\right) &= m\left(\widehat{XNB_1}\right) + m\left(\widehat{B_1NY}\right) \\ &= m\left(\widehat{NC_1B}\right) + m\left(\widehat{AB_1N}\right) \\ &= 180^\circ - m\left(\widehat{BAC}\right). \end{aligned}$$



Deoarece $\widehat{XNY}$ are laturile paralele cu AB şi AC şi are măsura $180^\circ - m\left(\widehat{BAC}\right)$, rezultă că bisectoarea acestuia este paralelă cu bisectoarea exterioară a $\widehat{BAC}$.

Demonstraţia 2. Fie $\overrightarrow{u} = \dfrac{1}{AB} \cdot \overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{v} = \dfrac{1}{AC} \cdot \overrightarrow{AC}$, cei doi versori ai dreptelor AB şi AC. Avem: $\overrightarrow{B_1C} = x \cdot \overrightarrow{v}$ şi $\overrightarrow{BC_1} = x \cdot \overrightarrow{u}$.

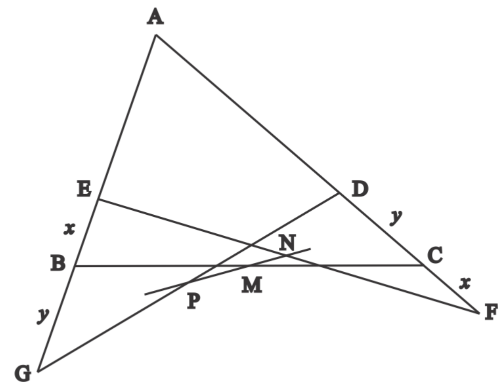
Din **Lema 1** obţinem: $\overrightarrow{MN} = \dfrac{\overrightarrow{CB_1} + \overrightarrow{BC_1}}{2} = \dfrac{x}{2}(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) = x \cdot \sin \dfrac{A}{2} \cdot \overrightarrow{b}$, unde $\overrightarrow{b}$ este un versor al bisectoarei exterioare a unghiului $\widehat{BAC}$.

Într-adevăr, $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AT}$, cu

$$AT^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 - 2\|\overrightarrow{u}\| \cdot \|\overrightarrow{v}\| \cdot \cos A = 4 \sin^2 \frac{A}{2}.$$

Multe dintre problemele în care se foloseşte teorema bisectoarei interioare glisante pot fi transformate în probleme analoage, în care se foloseşte teorema bisectoarei exterioare glisante. Iată câteva exemple:

Propoziţia 1. *Fie triunghiul ABC şi $D \in (AC)$, $F \in AC$, $E \in (AB)$, $G \in AB$, astfel încât $CD = BG$, $CF = BE$, iar $C \in (DF)$ şi $B \in (EG)$.*
În aceste condiţii, dreapta determinată de mijloacele segmentelor $[EF]$ şi $[DG]$ trece prin mijlocul lui (BC).



Demonstraţie. Notăm cu M, N şi P mijloacele segmentelor $[BC], [EF]$, respectiv $[DG]$. Din teorema bisectoarei exterioare glisante, avem că MP şi MN sunt perpendiculare pe bisectoarea $\widehat{BAC}$, deci punctele M, N, P sunt coliniare.

Consecinţa 1. *Cu notaţiile din* ***Propoziţia 1****, dacă* $BE = x$, $CD = y$, *atunci avem* $NP = (x+y)\cdot\sin\dfrac{A}{2}$.

Demonstraţie. Într-adevăr, notând cu $\overrightarrow{u} = \dfrac{1}{AB}\cdot\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{v} = \dfrac{1}{AC}\cdot\overrightarrow{AC}$ cei doi versori ai dreptelor AB şi AC, avem: $\overrightarrow{BG} = y\cdot\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{BE} = -x\cdot\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{CF} = x\cdot\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{CD} = -y\cdot\overrightarrow{v}$. Apoi, din **Lema 1** avem: $\overrightarrow{MP} = \dfrac{\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CD}}{2} = y\cdot\sin\dfrac{A}{2}\cdot\overrightarrow{b}$ şi $\overrightarrow{MN} = \dfrac{\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}}{2} = -x\cdot\sin\dfrac{A}{2}\cdot\overrightarrow{b}$, unde $\overrightarrow{b} = \dfrac{1}{2\sin\frac{A}{2}}(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v})$ este versorul bisectoarei exterioare a $\widehat{BAC}$.

Aşadar $M \in (PN)$ şi $NP = (x+y)\cdot\sin\dfrac{A}{2}$.

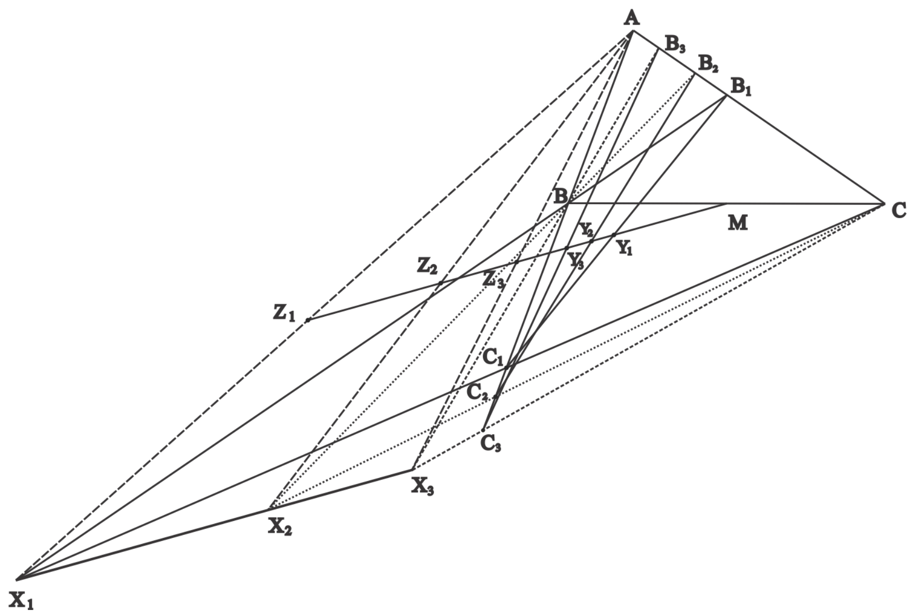
Propoziţia 2. *Fie triunghiul* ABC *şi* $B_1, B_2, B_3 \in (CA)$, $C_1, C_2, C_3 \in (AB$, *astfel încât* $B \in (AC_k)$, $BC_k = CB_k \overset{not}{=} a_k$ *şi* $AB_k \neq AB$, $k = \overline{1,3}$.
Notăm $CC_k \cap BB_k = \{X_k\}$, $k = \overline{1,3}$. *În aceste condiţii, următoarele triplete de puncte sunt coliniare*:

1) *mijloacele segmentelor* (B_kC_k), $k = \overline{1,3}$.
2) X_1, X_2, X_3.

Demonstraţie.

1) Fie M mijlocul lui $[BC]$ şi Y_k mijlocul lui (B_kC_k), $k = \overline{1,3}$. Din teorema bisectoarei exterioare glisante avem că pentru $k = \overline{1,3}$, Y_kM este perpendiculară pe bisectoarea interioară a unghiului $\widehat{BAC}$. Din unicitatea perpendicularei în M pe această bisectoare, obţinem concluzia.

2) Pentru $k = \overline{1,3}$, MY_k este dreapta Newton-Gauss a patrulaterului complet $CC_kBB_kX_kA$. Prin urmare, $MY_k \cap AX_k = \{Z_k\}$, iar Z_k este mijlocul segmentului (AX_k), pentru $k = \overline{1,3}$. $[Z_iZ_j]$ este linie mijlocie în ΔAX_iX_j, deci $Z_iZ_j \| X_iX_j$, pentru $i = \overline{1,3}, j = \overline{1,3}, i \neq j$. Deoarece punctele Z_1, Z_2, Z_3 sunt coliniare, rezultă că şi punctele X_1, X_2, X_3 sunt coliniare.



Consecinţa 2. *Cu notaţiile din* ***Propoziţia*** 2*, dacă* $b = AC, c = AB$*, atunci*:

a) $MY_k = a_k \cdot \sin \dfrac{A}{2}, \forall k = \overline{1,3}$.

b) MZ_1, MZ_2, MZ_3 *sunt invers proporţionale cu* $a_1 + c - b$, $a_2 + c - b$, $a_3 + c - b$.

Demonstraţie. **a)** Ca în Teorema 2, se arată că $\overrightarrow{MY_1} = a_1 \cdot \sin \dfrac{A}{2} \cdot \overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{MY_2} = a_2 \cdot \sin \dfrac{A}{2} \cdot \overrightarrow{b}$ şi $\overrightarrow{MY_3} = a_3 \cdot \sin \dfrac{A}{2} \cdot \overrightarrow{b}$, unde $\overrightarrow{b}$ este un versor al bisectoarei exterioare a unghiului $\widehat{BAC}$. Rezultă $MY_k = a_k \cdot \sin \dfrac{A}{2}, \forall k = \overline{1,3}$.

b) Aplicând teorema lui Menelaus pentru ΔAC_1C şi transversala $X_1 - B - B_1$, obţinem $\dfrac{X_1C_1}{X_1C} = \dfrac{b - a_1}{c}$.

Aşadar $$\overrightarrow{MX_1} = \frac{\overrightarrow{MC_1} + \dfrac{a_1 - b}{c} \cdot \overrightarrow{MC}}{1 + \dfrac{a_1 - b}{c}} = \frac{c \cdot \overrightarrow{MC_1} + (a_1 - b) \cdot \overrightarrow{MC}}{a_1 + c - b}.$$

Deoarece $\dfrac{C_1B}{C_1A} = \dfrac{a_1}{c + a_1}$, avem

$$\overrightarrow{MC_1} = \frac{\overrightarrow{MB} - \dfrac{a_1}{c + a_1} \cdot \overrightarrow{MA}}{1 - \dfrac{a_1}{c + a_1}} = \frac{(c + a_1) \cdot \overrightarrow{MB} - a_1 \cdot \overrightarrow{MA}}{c}.$$

Folosind că $\overrightarrow{MC} = -\overrightarrow{MB}$, obţinem: $\overrightarrow{MX_1} = \dfrac{(b + c) \cdot \overrightarrow{MB} - a_1\overrightarrow{MA}}{a_1 + c - b}$ şi apoi:

$$\overrightarrow{MZ_1} = \frac{\overrightarrow{MX_1} + \overrightarrow{MA}}{2} = \frac{(c + b) \cdot \overrightarrow{MB} + (c - b) \cdot \overrightarrow{MA}}{2\,(a_1 + c - b)}.$$

Analog, deducem:

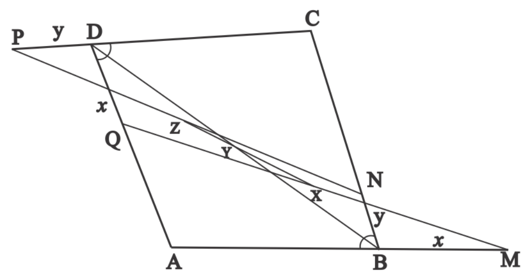
$$\overrightarrow{MZ_2} = \frac{(c + b) \cdot \overrightarrow{MB} + (c - b) \cdot \overrightarrow{MA}}{2\,(a_2 + c - b)} \qquad \text{şi}$$
$$\overrightarrow{MZ_3} = \frac{(c + b) \cdot \overrightarrow{MB} + (c - b) \cdot \overrightarrow{MA}}{2\,(a_3 + c - b)}.$$

Aşadar, $(a_1 + c - b) \cdot \overrightarrow{MZ_1} = (a_2 + c - b) \cdot \overrightarrow{MZ_2} = (a_3 + c - b) \cdot \overrightarrow{MZ_3}$, de unde rezultă concluzia.

Propoziţia 3. *Fie $ABCD$ un patrulater convex cu $\widehat{ADC} \equiv \widehat{ABC}$ şi punctele $Q \in (AD)$, $B \in (AM)$, $N \in (BC)$, $D \in (CP)$, astfel încât $BM = DQ$ şi $BN = PD$. Atunci, mijloacele segmentelor (MQ), (BD) şi (PN) sunt coliniare.*

Demonstraţie. Notăm cu X, Y şi Z mijloacele segmentelor $[MQ]\,, [BD]$ şi $[NP]$. Ştim că dacă un patrulater convex are două unghiuri opuse congruente, atunci bisectoarele celorlalte două unghiuri ale sale sunt paralele sau coincid.

Aplicăm Teorema bisectoarei exterioare glisante pentru ΔBCD şi obţinem că YZ e perpendiculară pe bisectoarea $\widehat{BCD}$. Analog deducem că XY e perpendiculară pe bisectoarea $\widehat{BAD}$. Deoarece cele două bisectoare au aceeaşi direcţie iar dreptele XY şi YZ au un punct comun, rezultă că $XY = YZ$, deci punctele X, Y, Z sunt coliniare.



Consecinţa 3. *Cu notaţiile din demonstraţia **Propoziţiei** 3, dacă $BM = x$ şi $BN = y$, atunci avem $XZ = x \cdot \sin\dfrac{A}{2} + y \cdot \sin\dfrac{C}{2}$.*

Demonstraţie. Ca în Teorema 2, obţinem $\overrightarrow{XY} = x \cdot \sin\dfrac{A}{2} \cdot \overrightarrow{b}$ şi $\overrightarrow{ZY} = -y \cdot \sin\dfrac{C}{2} \cdot \overrightarrow{b}$, unde $\overrightarrow{b}$ este un vector director al bisectoarelor exterioare ale unghiurilor $\widehat{BAD}$ şi $\widehat{BCD}$ (care sunt paralele, deci au aceeaşi direcţie).
Rezultă că $XZ = x \cdot \sin\dfrac{A}{2} + y \cdot \sin\dfrac{C}{2}$.

Extindem acum teorema bisectoarei exterioare glisante în cazul mai general al proporţionalităţilor:

Propoziţia 4. *Fie triunghiul ABC şi punctele $B_1 \in (AC)$, $C_1 \in (AB$, $M \in (BC)$ şi $N \in (B_1C_1)$, cu $B \in (AC_1)$, astfel încât are loc relaţia:*

$$\frac{BC_1}{CB_1} = \frac{BM}{MC} = \frac{C_1N}{NB_1} = k > 0.$$

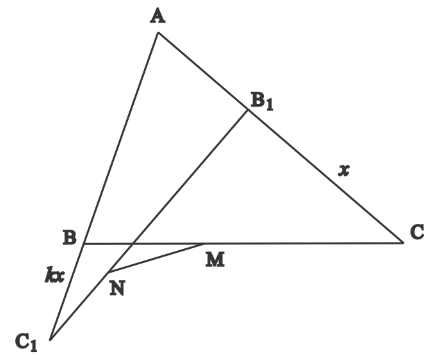
În aceste condiţii, dreapta MN este perpendiculară pe bisectoarea unghiului $\widehat{BAC}$.

Demonstraţie. Notăm $B_1C = x$, $\overrightarrow{u} = \dfrac{1}{AB} \cdot \overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{v} = \dfrac{1}{AC} \cdot \overrightarrow{AC}$ versorii dreptelor AB şi AC. Atunci, $\overrightarrow{BC_1} = kx \cdot \overrightarrow{u}$ şi $\overrightarrow{CB_1} = -x \cdot \overrightarrow{v}$.
Din **Lema 1** obţinem:

$$\overrightarrow{MN} = \frac{\overrightarrow{BC_1} + k \cdot \overrightarrow{CB_1}}{1+k} = \frac{kx}{1+k} \cdot \left(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\right).$$

Ca în demonstraţia a doua a Teoremei 2, deducem $\vec{u} - \vec{v} = 2\sin\dfrac{A}{2}\cdot\vec{b}$, unde $\vec{b}$ este un versor al bisectoarei exterioare a unghiului $\widehat{BAC}$.

Aşadar $\overrightarrow{MN} = \dfrac{2kx}{1+k}\cdot\sin\dfrac{A}{2}\cdot\vec{b}$, adică MN este paralelă cu bisectoarea exterioară a unghiului $\widehat{BAC}$, deci e perpendiculară pe bisectoarea interioară a acestuia.



Observaţie. *a*) Construind paralelogramele BC_1NX şi B_1CYN şi folosind aceleaşi idei ca în prima demonstraţie a **Teoremei 1**, se poate arăta geometric, foarte elegant, că afirmaţia din **Propoziţia 4** este adevărată. Îi invităm pe cititori să o facă.

b) Din demonstraţia vectorială de mai înainte, deducem că

$$MN = \frac{2kx}{1+k}\cdot\sin\frac{A}{2}.$$

În final, le lăsăm cititorilor bucuria rezolvării următoarelor probleme, care reprezintă o continuare firească a celor de mai înainte:

1. *Fie triunghiul ABC şi $B_1, B_2 \in AC$, cu $C \in (B_1B_2)$, $B_1 \in (AC)$, $C_1, C_2 \in AB$, cu $C_2 \in (AB)$, $B \in (C_1C_2)$, $M \in (BC)$, $N \in (C_1B_1)$, $P \in (C_2B_2)$, astfel încât $\dfrac{BC_1}{CB_1} = \dfrac{BC_2}{CB_2} = \dfrac{BM}{MC} = \dfrac{NC_1}{NB_1} = \dfrac{PC_2}{PB_2} = k$. În aceste condiţii, demonstraţi că punctele M, N şi P sunt coliniare şi $\dfrac{MN}{MP} = \dfrac{BC_1}{BC_2}$.*

2. *Fie patrulaterul convex $ABCD$, cu $AD \nparallel BC$ şi punctele $E \in (AD)$, $F \in (BC)$, $M \in (AC)$, $N \in (BE)$, $P \in (BD)$ şi $Q \in (AF)$, astfel încât $\dfrac{AE}{BC} = \dfrac{BF}{AD} = \dfrac{MA}{MC} = \dfrac{NE}{NB} = \dfrac{PB}{PD} = \dfrac{QF}{QA}$. Arătaţi că $\overrightarrow{MN} = \dfrac{BC}{AD}\cdot\overrightarrow{QP}$.*

3. *Fie patrulaterul convex $ABCD$ cu $AB \nparallel CD$ şi punctele $P \in (AB)$, $Q \in (CD)$, astfel încât $\dfrac{PA}{PB} = \dfrac{CQ}{DQ}$. Fie $M \in (PQ)$, $N \in (BD)$ şi $R \in (AC)$, cu*

$$\frac{MP}{MQ} = \frac{NB}{ND} = \frac{BP}{DQ} = \frac{AR}{CR}.$$

Arătaţi că punctele M, N şi R sunt coliniare şi $\dfrac{MN}{MR} = \dfrac{AB}{CD}\cdot\dfrac{DQ}{AP}$.

4. *Fie triunghiul ABC şi punctele mobile $M \in (BA)$, $N \in (CA)$ şi $P \in (AB$, cu $B \in (AP)$, astfel încât $MB = BP = CN$.*
Demonstraţi că cercurile ale căror diametre au capetele în mijloacele segmentelor (MN) şi (NP) trec printr-un punct fix.

5. *Patrulaterul convex $ABCD$ are $(AB) \equiv (CD)$ şi $AB \nparallel CD$. Se aleg punctele $P \in (AB)$ şi $Q \in (CD)$, astfel încât $AP = CQ$. Demonstraţi că mijloacele X, Y, Z ale segmentelor $(BD), (PQ)$ şi (AC) sunt coliniare şi $\dfrac{XY}{XZ} = \dfrac{BP}{AB}$.*

6. *Fie triunghiurile ABC şi DEF cu $AB = DE$, $AC = DF$, $AB \nparallel DE$, $AC \nparallel DF$ şi $m\left(\widehat{CAB}\right) + m\left(\widehat{EDF}\right) = 180^\circ$.*
Dacă M, N, P, Q sunt respectiv mijloacele segmentelor $(BD), (AE), (CD)$ şi (AF), să se arate că $MN \perp PQ$.

7. *Fie triunghiurile ABC şi $A'B'C'$ situate în plane paralele, cu $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $AB \nparallel A'B'$, $AC \nparallel A'C'$ şi $m\left(\widehat{CAB}\right) + m\left(\widehat{C'A'B'}\right) = 180^\circ$.*
Dacă M, N, P, Q sunt respectiv mijloacele segmentelor $(A'B), (AB'), (A'C)$ şi (AC'), să se arate că $MN \perp PQ$.

8. *Fie triunghiul ABC şi punctele $M \in AB \setminus (AB)$, $P, Q \in (BC)$ şi $N \in (AC)$, astfel încât $BM = BQ = CP = CN$. Fie S mijlocul lui (MQ) şi T mijlocul lui (NP). Notăm cu d_a dreapta determinată de mijloacele segmentelor (BC) şi (ST). În mod analog definim dreptele d_b şi d_c.*
Fie $\{A_1\} = d_b \cap d_c$, $\{B_1\} = d_a \cap d_c$ şi $\{C_1\} = d_a \cap d_b$. Arătaţi că perpendicularele din A_1 pe BC, din B_1 pe AC şi din C_1 pe AB sunt concurente.

Bibliografie

[1] Eckstein A., *În legătură cu teorema bisectoarei glisante*, RMT nr. 3/2014, 11–16
[2] Braica P., *Extinderi ale teoremei bisectoarei glisante în spaţiu*, RMT
[3] Braica P. şi Durla C., *Variaţiuni ale teoremei bisectoarei glisante*
[4] Heuberger Dana (coord), Bojor Florin(coord), *Matematică de excelenţă pentru concursuri, olimpiade şi centre de excelenţă*, Clasa a IX-a, 2013, Ed. Paralela 45, 193–219

Profesor, Şcoala gim. "Grigore Moisil", Satu Mare
Profesoară, C.N. "Gheorghe Şincai", Baia Mare

Argument 18

Aplicaţii ale formulei lui Taylor

Costel Chiteş

Abstract. In this article we will see several situations where the use of Taylor's theorem facilitates the solving of some approximation problems.

Pentru studierea unor probleme de extrem, cât şi a unor probleme din algebra polinoamelor, este necesară abordarea formulei lui Taylor pentru polinoame şi extinderea ei pentru funcţii reale de clasă $n \in \mathbb{N}^*$. Formula lui Taylor aproximează "de ordin superior" o funcţie şi generalizează aproximarea liniară bazată pe prima derivată. Este una dintre cele mai importante formule de matematică, utilizată în special în aproximarea prin polinoame a funcţiilor reale. Alcătuirea tablelor trigonometrice, logaritmice etc. a fost posibilă prin utilizarea formulei lui Taylor. Prin aplicarea ei, putem deduce un criteriu cu ajutorul căruia se determină diferite tipuri de puncte de extrem.

Scurt istoric. De-a lungul istoriei s-au căutat legi care să descrie legile fizicii. Aşa cum este prezentat în lucrarea [1], René Descartes (1596–1650) este primul care a formulat explicit şi riguros conceptul de lege a naturii în sensul modern, aşa cum îl cunoaştem azi. Descartes credea că toate fenomenele fizice trebuie explicate prin ciocnirile maselor în mişcare, fiind guvernate de trei legi precursoare ale faimoaselor legi ale mişcării formulate de I. Newton. Pierre de Maupertuis (1698–1759) prezintă "principiul metafizic" prin care presupune că natura funcţionează mereu cu cea mai mare economie de mijloace. Apoi, matematicianul elveţian Leonhard Euler (1707–1783) a prevăzut o mare parte a rezultatelor matematice relative teoriei maximelor şi minimelor funcţiilor scalare. Matematicianul Brook Taylor (1685–1731) devine membru al Royal Society în anul 1712. Descoperă metoda integrării prin părţi şi publică formula ce-i poartă numele în anul 1715 (Methodus incrementorum directa et inversa).

A) Formula lui Taylor pentru polinoame

Se consideră $P(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0 \in \mathbb{R}[X]$ şi $x_0 \in \mathbb{R}$. Există $A_0, A_1, \ldots, A_n \in \mathbb{R}$ pentru care

$$P(X) = A_0 + A_1(X - x_0) + A_2(X - x_0)^2 + \cdots + A_n(X - x_0)^n.$$

Demonstraţie. $P(x_0) = A_0$. Derivând formal, succesiv, obţinem $P'(X) = A_1 + 2A_2(X - x_0) + 3A_3(X - x_0)^2 + \cdots + A_n(X - x_0)^{n-1}$, de unde $P'(x_0) = A_1$, apoi $P''(X) = 2A_2 + 3!A_3(X - x_0) + \cdots + n(n-1)A_n(X - x_0)^{n-2}$, de unde $P'(x_0) = 2A_2$, sau $A_2 = \dfrac{P''(x_0)}{2!}, \ldots A_n = \dfrac{P^{(n)}(x_0)}{n!}$.

Am obţinut astfel formula:

$$P(X) = P(x_0) + \frac{P'(x_0)}{1!}(X - x_0) + \frac{P''(x_0)}{2!}(X - x_0)^2 + \cdots + \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}(X - x_0)^n.$$

Exerciţiu rezolvat.

Să se dezvolte polinomul $P(X) = X^3 - 3X + 7$ după puterile lui $X - 1$.

Soluţie. $\mathrm{grad}(P) = 3$, $x_0 = 1$, deci formula lui Taylor este:

$$P(X) = P(1) + \frac{P'(1)}{1!}(X-1) + \frac{P''(1)}{2!}(X-1)^2 + \frac{P'''(1)}{3!}(X-1)^3.$$

Prin calcul deducem $P(1) = 5$, $P'(1) = 0$, $P''(1) = 6$, $P'''(1) = 6$, deci

$$P(X) = (X-1)^3 + 3(X-1)^2 + 5.$$

B) Formula lui Taylor cu restul sub formă integrală

În cele ce urmează, pentru $k \in \mathbb{N}^*$, spunem că funcţia $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ este de clasă C^k, dacă este de k ori derivabilă pe $[\alpha, \beta]$, cu $f^{(k)}$ continuă.

Fie $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă $C^{n+1}[\alpha, \beta]$, unde $n \in \mathbb{N}$ fixat. Atunci pentru orice $a \in (\alpha, \beta)$ şi pentru orice $x \in [\alpha, \beta]$ are loc formula:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots$$
$$+ \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \int_a^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\,dt.$$

Demonstraţie. $\displaystyle\int_a^x f'(t)dt = f(t)\Big|_a^x = f(x) - f(a)$, de unde deducem

$f(x) = f(a) + \displaystyle\int_a^x f'(t)dt$. Apoi,

$$\int_a^x f'(t)dt = -\int_a^x f'(t)(x-t)'dt = -f'(t)(x-t)\Big|_a^x + \int_a^x (x-t)f''(t).$$

Înlocuind în relaţia precedentă, deducem

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \int_a^x (x-t)f''(t)dt.$$

Prin raţionament inductiv se ajunge la formula dată.

Remarcă. Pentru f, a, n fixate, polinomul $T_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ se numeşte polinomul lui Taylor de grad n asociat funcţiei f în x_0.

Expresia $R_n(x) = \displaystyle\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$ este numită rest integral de ordin n.

Propoziţie. *Fie $\varphi, \psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ funcţii continue, cu proprietatea că ψ are semn constant pe $[a, b]$. Atunci există $\xi \in [a, b]$ astfel încât*

$$\int_a^b \varphi(x) \cdot \psi(x)dx = \varphi(\xi)\int_a^b \psi(x)dx.$$

Remarcă. Din această afirmaţie, pentru cazul particular $\psi(x) = 1$, $\forall\, x \in [a, b]$, deducem teorema de medie pentru integrala definită.

C) Formula lui Taylor cu restul lui Lagrange

Fie $f; [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă $C^{n+1}[\alpha, \beta]$, unde $n \in \mathbb{N}$ fixat. Atunci pentru orice $a \in (\alpha, \beta)$ şi pentru orice $x \in [\alpha, \beta]$ există $\xi \in [\alpha, \beta]$ (depinzând de x) situat între a şi x, astfel încât

$$\begin{aligned} f(x) = f(a) &+ \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots \\ &+ \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \end{aligned}$$

Demonstraţie. Dacă $a < x$, iar $t \in [a, x]$, atunci $x - t \geq 0$ şi în formula lui Taylor cu restul sub formă integrală, considerăm $\psi(x) = \dfrac{(x-t)^n}{n!}$ şi

$$\varphi(x) = f^{(n+1)}(x).$$

Atunci,

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \int_a^x \varphi(x) \cdot \psi(x) dx = \varphi(\xi) \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}\, dt \\ &= -\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} \left[\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} \right] \Bigg|_a^x = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \end{aligned}$$

Analog, pentru cazurile $x < a$ sau $x = a$.

Consecinţă (Formula lui Mac Laurin)

Pentru $\alpha > 0$ se consideră o funcţie $f : [-\alpha, \alpha] \to \mathbb{R}$ de clasă $C^{(n+1)}$. Atunci, pentru orice $x \in (-\alpha, \alpha)$ există ξ între 0 şi x astfel încât

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Simbolul lui E. Landau

Fie $x_0 \in \mathbb{R}$, V o vecinătate a lui x_0 şi funcţiile $f, g : V \to \mathbb{R}$.
Dacă $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$, vom nota $f = \bigcirc(g)$ în x_0. $\bigcirc(g)$ este simbolul lui E. Landau şi se foloseşte atunci când $\limsup\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} < \infty$. Atunci,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0) = 0,$$

deci putem scrie $R_n(x) = \bigcirc((x - x_0)^n)$, de unde rezultă $f(x) = T_n(x) + \bigcirc(x^n)$, în $x_0 = 0$, dacă notăm cu

$$T_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\,x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n$$

polinomul Taylor de grad n asociat funcţiei f în punctul 0.

Aplicaţii.

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \bigcirc(x^n),\ \forall\, x \in \mathbb{R};\\ \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n+1}\,\frac{x^n}{n} + \bigcirc(x^n),\ \forall\, x \in (-1,1)\\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n\,\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \bigcirc(x^{2n+1}),\ \forall\, x \in \mathbb{R}\\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\,\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \bigcirc(x^{2n}),\ \forall\, x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Cum se formează exerciţiile în care intervine calculul limitelor de funcţii?

1). De exemplu, avem o foaie de hârtie şi nicio culegere de probleme pe masă. Ştim că $\lim\limits_{x\to 0}(x - \sin x) = 0$. Ne întrebăm dacă putem determina o valoare $k \in \mathbb{N}$ pentru care există, este finită şi nenulă $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \sin x}{x^k}$? Da, putem.
Considerăm funcţia $f(x) = \sin x$, care este indefinit derivabilă şi îi aplicăm formula lui Mac Laurin pentru $n = 1$. Obţinem $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \bigcirc(x^3)$. Înlocuim şi limita dată devine $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - x + \dfrac{x^3}{3!} + \bigcirc(x^3)}{x^k} = \dfrac{1}{6}$, pentru $k = 3$ (am pus $+\bigcirc(x^3)$ în loc de $-\bigcirc(x^3)$, deoarece prin împărţire la x^3 nu se schimbă rezultatul). De analizat şi alte valori, pentru $k \neq 3$.

2). Dezvoltăm funcţia $f(x) = \sin x$ în punctul $x = 0$, pentru $n = 2$ şi cu ajutorul formulei lui Mac Laurin obţinem: $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \bigcirc(x^5)$ sau $\sin x - x + \dfrac{x^3}{6} = \dfrac{x^5}{120} + \bigcirc(x^5)$, de unde împărţind prin $x^5 \neq 0$ obţinem

$$\frac{\sin x - x + \dfrac{x^3}{6}}{x^5} = \frac{1}{120} + \frac{\bigcirc(x^5)}{x^5} \xrightarrow{x\to 0} \frac{1}{120}\,.$$

Am creat astfel o limită de funcţie.
Evident că putem determina valoarea limitei cu ajutorul regulii lui l'Hospital. Avantajul formulei lui Taylor este de a crea limitele. Acesta este doar un prim avantaj.

3). Un alt mare avantaj al formulei lui Taylor îl reprezintă calculul aproximativ.
De exemplu, dorim să determinăm $\sin 33^\circ$ cu 5 zecimale exacte.

Transformăm unghiul în radiani $33^\circ = 30^\circ + 3^\circ = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{60}$. Considerăm funcţia $f(x) = \sin x$ şi scriem formula lui Taylor de ordinul $n = 3$. Pentru $h \neq 0$ avem:

$$f(x+h) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!}\,h + \frac{f''(x)}{2!}\,h^2 + \frac{f'''(x)}{3!}\,h^3 + \frac{f^{IV}(\xi)}{4!}\,h^4,$$

unde ξ este între x şi $x + h$. Există $\theta \in (0,1)$ astfel încât $\xi = x + \theta h$.
Vom obţine:

$$\sin(x+h) = \sin x + \frac{h}{1!}\cos x - \frac{h^2}{2!}\sin x - \frac{h^3}{3!}\cos x + \frac{h^4}{4!}\sin(x+\theta h).$$

Pentru a evalua restul se observă că avem

$$\left|\frac{h^4}{4!}\sin(x+\theta h)\right| \le \frac{h^4}{4!} = \frac{\left(\dfrac{\pi}{60}\right)^4}{4!} \le \frac{1}{10^6},$$

deci obţinem 5 zecimale exacte:

$$\sin 33^\circ \simeq \frac{1}{2} + \frac{\pi}{60}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi^2}{2\cdot 60^2}\cdot\frac{1}{2} - \frac{\pi^3}{6\cdot 60^3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \simeq 0,54464$$

(valoare afişată de exemplu în programul Scientific WorkPlace).

4). Precizarea unor condiţii suficiente de extrem (Mac Laurin, 1742)
Fie $f : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă $C^n[\alpha,\beta]$, unde $n \in \mathbb{N}^*$ fixat, $a \in (\alpha,\beta)$ astfel încât $f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0$, $f^{(n)}(a) \neq 0$.
Dacă n este par, atunci a este un punct de extrem local:

$i)$ dacă $f^{(n)}(a) > 0$, atunci a este un minim local;

$ii)$ dacă $f^{(n)}(a) < 0$, atunci a este un maxim local.

Dacă n este impar, atunci a nu este un punct de extrem local.

Demonstraţie. Utilizăm formula lui Taylor cu restul lui Lagrange. Pentru oricare $x \in [\alpha,\beta]$ avem

$$f(x) - f(a) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\,(x-a)^n, \text{ unde } \xi \text{ este între } a \text{ şi } x.$$

Dacă n este par, atunci $(x-a)^n \ge 0$, $\forall\, x \in [\alpha,\beta]$.

Cazul $i)$. Dacă $f^{(n)}(a) > 0$, cum $f^{(n)}$ este funcţie continuă, există o vecinătate V a lui a pentru care $f^{(n)}(x) > 0$, $\forall\, x \in V \cap [\alpha,\beta]$, deci $f^{(n)}(\xi) > 0$, de unde deducem că $f(x) \ge f(a)$, $\forall\, V \cap [\alpha,\beta]$, adică a este un minim local.

Analog se demonstrează $ii)$. Dacă n este impar, diferenţa $f(x) - f(a)$ are semn variabil pe orice vecinătate a lui a, deci a nu este un punct de extrem local.

5). Este $a = \dfrac{\pi}{2}$ un punct de extrem pentru funcţia

$$f : [0,\pi] \to \mathbb{R},\ f(x) = (2x-\pi)^5 \cos x?$$

Soluţie. $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=f''\left(\frac{\pi}{2}\right)=f'''\left(\frac{\pi}{2}\right)=f^{IV}\left(\frac{\pi}{2}\right)=f^{V}\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ şi $f^{VI}\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$, deci $\frac{\pi}{2}$ este maxim local.

E) Formula lui Taylor pentru funcţii reale de variabilă vectorială

Vom analiza, pe scurt, câteva aspecte noi, pentru a înţelege importanţa formulei studiate în liceu.

Definiţii. Vom considera spaţiul vectorial $X=\mathbb{R}^2$ înzestrat cu produsul scalar $\langle\,\rangle$: $\forall\, x=(x_1,x_2),\ y=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2$, definim $\langle x,y\rangle = x_1\cdot y_1 + x_2\cdot y_2 \in \mathbb{R}$ (spaţiu prehilbertian). Norma indusă este funcţia $\|\ \|:\mathbb{R}^2\to[0,\infty)$, prin $\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}$, $\forall\, x\in\mathbb{R}^2$. Distanţa dintre $x,y\in\mathbb{R}^2$ se defineşte prin

$$d(x,y)=\|x-y\|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2},$$

care este distanţa euclidiană.

Fie $a=(a_1,a_2)\in\mathbb{R}^2$ un punct fix şi $r>0$.
Atunci $B(a,r)=\{x\in\mathbb{R}^2 | d(a,x)<r\}$ este bila deschisă de centru a şi rază r. O mulţime $D\subseteq\mathbb{R}^2$ este deschisă dacă $D=\emptyset$ sau dacă $D\neq\emptyset$ şi pentru orice $x\in D$ există $r>0$ astfel încât $B(x,r)\subseteq D$. familia tuturor deschiselor din $\mathbb{R}^2$ formează o topologie. Primele cunoştinţe se completează cu noţiunile de mulţime închisă, punct interior, de acumulare, de aderenţă, etc.
În spaţiul metric $\mathbb{R}^2$, se defineşte convergenţa şirurilor şi se studiază apoi şirurile Cauchy. De exemplu, $(x_n)_n$ din $\mathbb{R}^2$ e convergent dacă există $a\in\mathbb{R}^2$ aşa încât $\forall\,\varepsilon>0$ $\exists\, n_\varepsilon\in\mathbb{N}^*$ pentru care $d(x_n,a)<\varepsilon$, $\forall\, n\geq n_\varepsilon$.

Definiţie. Fie $D\subseteq\mathbb{R}^2$ o mulţime deschisă, $a=(a_1,a_2)\in D$, $s=(s_1,s_2)\in\mathbb{R}^2$ un versor ($\|s\|=1$) şi funcţia $f:D\to\mathbb{R}$. Există $r>0$ aşa încât $B(a,r)\subseteq D$.
Pentru orice $t\in(-r,r)$ avem $d(a+ts,a)=\|a+ts-a\|=\|ts\|=|t|\cdot\|s\|=|t|<r$, deci $a+ts\in B(a,r)\subseteq D$, astfel că putem defini funcţia reală $g:(-r,r)\to\mathbb{R}$, $g(t)=f(a+ts)=f(a_1+ts_1,a_2+ts_2)$. Spunem că f este derivabilă după versorul s, dacă g este derivabilă în $t=0$. În acest caz, $g'(0)\overset{not}{=}\frac{df}{ds}(a)$.
Deci derivata lui f în punctul a după direcţia s este

$$\frac{df}{ds}(a)=\lim_{t\to 0}\frac{f(a+ts)-f(a)}{t}.$$

Aceasta se mai numeşte derivata Gâteaux (slabă).

Exerciţiu rezolvat. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=xy^2$, $s=\left(-\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)\in\mathbb{R}^2$ un versor. Să se determine $\frac{df}{ds}(a)$, unde $a=(-2,3)$.

Soluţie. $\|s\| = \sqrt{\left(-\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = 1$, deci am verificat că s este versor. Calculăm

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(a+ts)-f(a)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f\left(-2-\frac{3}{5}t, 3+\frac{4}{5}t\right)-f(-2,3)}{t} = -15.$$

Definiţie. Fie (e_1, e_2) baza canonică a lui $\mathbb{R}^2$, adică $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$. Fiind versori ai axelor de coordonate, putem defini pentru o funcţie $f : D \to \mathbb{R}$, cu $D \subseteq \mathbb{R}^2$ o mulţime deschisă şi pentru $a \in D$, derivata

$$\frac{df}{de_1}(a) = \lim_{t\to 0}\frac{f(a+te_1)-f(a)}{t} \overset{def}{=} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a),$$

numită derivata parţială a lui f în raport cu x_1 în punctul a. Analog se defineşte derivata parţială a lui f în raport cu x_2 în punctul a:

$$\frac{df}{de_2}(a) = \lim_{t\to 0}\frac{f(a+te_2)-f(a)}{t} \overset{def}{=} \frac{\partial f}{\partial x_2}(a).$$

Funcţia f este derivabilă parţial în raport cu x_k, $k \in \{1,2\}$ pe deschisul D, dacă în oricare punct $a \in D$ există $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$.

Exerciţiu rezolvat. Pentru $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 + xy$, să se calculeze

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y),\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y).$$

Soluţie. Notăm cu $\Delta x, \Delta y$ creşterile argumentelor x, y. Atunci

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2+(x+\Delta x)y-x^2-xy}{\Delta x} = 2x+y,\end{aligned}$$

deci reţinem ca regulă că îl considerăm pe y fixat şi derivăm în raport cu x.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}\\ &= \lim_{\Delta y\to 0}\frac{x^2+x(y+\Delta y)-x^2-xy}{\Delta y} = x,\end{aligned}$$

deci reţinem ca regulă că îl considerăm pe x fixat şi derivăm în raport cu y.

Definiţie. Fie $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un deschis şi $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie pentru care există $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$, $k \in \{1,2\}$, $\forall\, a \in D$. Funcţiile $\frac{\partial f}{\partial x_k} : D \to \mathbb{R}$, $a \to \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$ se numesc derivatele parţiale ale lui f pe D. Spunem că $f \in C^1(D)$, dacă f este derivabilă parţial pe D şi funcţiile $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ sunt continue pe D.

Definiţie. Fie $D \subseteq \mathbb{R}^2$ o mulţime deschisă. O funcţie $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ se numeşte aplicaţie liniară, dacă

$$\forall\, x, y \in D, \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, T(\alpha \cdot x + \beta \cdot y) = \alpha \cdot T(x) + \beta \cdot T(y).$$

Definiţie. Fie $D \subseteq \mathbb{R}^2$ o mulţime deschisă, $a \in D$. O funcţie $f : D \to \mathbb{R}$ este diferenţiabilă în a, dacă există o aplicaţie liniară $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ astfel încât

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - T(x-a)}{\|x - a\|} = 0.$$

Notaţie: $T = df(a)$. Funcţia f este diferenţiabilă, dacă este diferenţiabilă în oricare $a \in D$. Putem scrie echivalent: există $\varphi : D \backslash \{a\} \to \mathbb{R}$, cu $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = 0$ astfel încât

$$f(x) = f(a) + T(x-a) + \|x - a\| \cdot \varphi(x),\ \forall\, x \in D.$$

Propoziţie. *Fie $D \subseteq \mathbb{R}^2$ o mulţime deschisă, $a \in D$ şi o funcţie $f : D \to \mathbb{R}$ diferenţiabilă în a. Atunci pentru orice versor $s \in \mathbb{R}^2$, există $\dfrac{df}{ds}(a) = df(a)(s)$. În particular, $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a) = df(a)(e_k)$, $k \in \{1, 2\}$.*

Demonstraţie. Deoarece $a \in D$, rezultă că există $r > 0$ astfel încât $B(a, r) \subseteq D$, deci pentru orice $t \neq 0$, $|t| < r$, avem:

$$\begin{aligned} \lim_{t \to 0} \frac{f(a + ts) - f(a)}{t} &= \lim_{t \to 0} \frac{df(a)(ts) + \|ts\| \cdot \varphi(a + ts)}{t} \\ &= df(a)(s) + \lim_{t \to 0} \frac{|t|}{t} \cdot \varphi(a + ts) = df(a)(s). \end{aligned}$$

Remarcă. Un rezultat important este următorul:
Dacă $f \in C^1(D)$, atunci f este diferenţiabilă.
Dacă f este diferenţiabilă în $a \in D$, unde $D \subseteq \mathbb{R}^2$ este o mulţime deschisă, atunci

$$df(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) dx_2.$$

Dacă există derivatele parţiale, atunci notăm $\dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_k}\right) \overset{not}{=} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}$, pentru $j \neq k$ şi $\dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_j}\right) \overset{not}{=} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}$, pentru $j = k$.

Spunem că funcţia $f \in C^2(D)$, dacă $f \in C^1(D)$ şi $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dfrac{\partial f}{\partial x_2} \in C^1(D)$. Definiţia se generalizează pentru $f \in C^n(D)$.

Notă istorică. În studiile sale de termodinamică, L. Euler, în anul 1734, a enunţat teorema prin care derivatele mixte sunt egale. În 1873, Hermann Schwarz (1843–1921) a dat un exemplu în care nu se verifică egalitatea derivatelor mixte de ordinul II. Este necesar ca acestea să fie continue.

Teorema lui Schwarz. *Dacă $D \subseteq \mathbb{R}^2$ este o deschisă, $f \in C^2(D)$, atunci*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a), \ \forall\, a \in D.$$

Formula lui Taylor. Fie $D \subseteq \mathbb{R}^2$ o deschisă, $a \in D$, $f \in C^p(D)$. Alegem $r > 0$ astfel încât $B(a,r) \subseteq D$ şi $T_a(x) = (x_1 - a_1)\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a) + (x_2 - a_2)\dfrac{\partial f}{\partial x_2}(a)$, iar $[T_a(x)]^{(k)}$, $2 \le k \le p$ reprezintă puterea simbolică a polinomului $T_a(x)$. Atunci, pentru oricare $x \in B(a,r)$, există $\xi \in [a,x]$ pentru care avem:

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{1!}\,T_a(x) + \frac{1}{2!}\,[T_a(x)]^{(2)} + \cdots + \frac{1}{(p-1)!}\,[T_a(x)]^{(p-1)} + [T_a^*(x)]^{(p)},$$

unde în puterea simbolică derivatele de ordinul p sunt calculate în punctul ξ.

Indicaţie. Se consideră un versor $s = (s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2$. Există $r > 0$ astfel încât $B(a,r) \subseteq D$, $t \in (-r,r)$. Definim funcţia $g : (-r,r) \to \mathbb{R}$,

$$g(t) = f(a + ts) = f(a_1 + ts_1, a_2 + ts_2) \in C^{(p)}(-r,r).$$

Se aplică formula lui Mac Laurin între 0 şi t.

Aplicaţie. Să se dezvolte polinomul $P(x,y) = x^2 + xy$ în punctul $(1,1) \in \mathbb{R}^2$.

Soluţie. Notăm $a = (1,1)$. Atunci,

$$\begin{aligned} P(x,y) = P(a) &+ \frac{1}{1!}\left(\frac{\partial P}{\partial x}(a)(x-1) + \frac{\partial P}{\partial y}(a)(y-1)\right) \\ &+ \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(a)(x-1)^2 + 2\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y}(a)(x-1) + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(a)(y-1)^2\right). \end{aligned}$$

Calculăm $\dfrac{\partial P}{\partial x}(x,y) = 2x + y$; $\dfrac{\partial P}{\partial x}(a) = 3$; $\dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y) = x$; $\dfrac{\partial P}{\partial y}(a) = 1$; $\dfrac{\partial^2 P}{\partial x^2}(x,y) = 2 = \dfrac{\partial^2 P}{\partial x^2}(a)$; $\dfrac{\partial^2 P}{\partial x \partial y}(x,y) = 1 = \dfrac{\partial^2 P}{\partial x \partial y}(a)$; $\dfrac{\partial^2 P}{\partial y^2}(x,y) = 0 = \dfrac{\partial^2 P}{\partial y^2}(a)$.
Deducem dezvoltarea:

$$P(x,y) = 2 + 3(x-1) + (y-1) + (x-1)^2 + (x-1)(y-1).$$

Concluzii finale.

1). Dezvoltarea Taylor conduce la stabilirea unor criterii suficiente pentru determinarea punctelor de extrem local.
2). Cunoaşterea cât mai temeinică a noţiunilor de analiză matematică din liceu poate să sprijine serios viitorul student.

Exerciţii propuse.

1). Să se dezvolte cu ajutorul formulei lui Taylor polinomul
$P(X) = X^4 + 5X^3 - 4X^2 + X - 3$ în $x_0 = 1$, apoi în $x_0 = -1$.

2). Fie $P(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0 \in \mathbb{R}[X]$, $1 \leq k \leq n-1$. Să se demonstreze echivalenţa: $x_0 \in \mathbb{R}$ este rădăcină a lui P cu ordinul de multiplicitate

$$k \Leftrightarrow \begin{cases} P(x_0) = 0 \\ P'(x_0) = 0 \\ \quad\vdots \\ P^{(k-1)}(x_0) = 0 \\ P^{(k)}(x_0) \neq 0 \end{cases}.$$

3). Fie $n \in \mathbb{N}$. Pentru polinomul $P(X) = X^{n+5} - X^{n+2} - 3X + 3$, care este ordinul de multiplicitate al rădăcinii $x_0 = 1$?

4). Este $a = 0$ punct de extrem pentru funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 \cdot 2^x$?

5). Calculaţi în moduri diferite limita următoare: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x \cdot \cos 2x \ldots \cos nx}{x^2}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$ fixat.

6). Pentru funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = e^{xy} + \sin(x^2 + y^2)$, să se dezvolte în $(0, \sqrt{\pi})$, pentru $p = 3$.

Bibliografie

[1] Hawking Stephen W. şi Mlodinow Leonard, *Marele plan*, traducere Ed. Humanitas, Bucureşti, 2012

[2] Stănăşilă O., *Analiză Matematică*, Ed. Did. şi Ped., Bucureşti, 1981

[3] Olmsted John M.H., *Advanced Calculus*, New York: Appleton-Century-Crofts, Inc., 1961

[4] Nicolescu M., Dinculeanu N. şi Marcus S., *Analiză Matematică*, Vol. 1, Ed. Did. şi Ped., Bucureşti, 1980

[5] Miculescu R., *Analiză Matematică, Note de curs*, Ed. Univ. din Bucureşti, 2010

Lector dr., Universitatea "Dimitrie Cantemir" Bucureşti

Argument 18

Generarea unei identităţi a lui Ramanujan

Costel Chiteş şi Daniela Chiteş

Abstract. In this paper will be given a generalization of an identity which was found by Srinivasa Ramanujan before his Cambridge period.

În această notă, ne propunem să generăm o identitate elaborată de matematicianul indian Srinivasa Ramanujan (în perioada dinaintea plecării sale la Cambridge).

Considerăm numărul iraţional $x=\sqrt[3]{2}$ care verifică ecuaţia algebrică $x^3-2=0$. Deducem că $(x+2)(x^3-2)=0$ sau echivalent $x^4+2x^3-2x-1=3$. Factorizând membrul stâng se obţine $(x-1)(x+1)^3=3$, de unde deducem $\left(\sqrt[3]{2}-1\right)\left(\sqrt[3]{2}+1\right)^3=3$. Scoatem radicalul aritmetic de ordin 3 şi obţinem $\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1}\cdot\left(\sqrt[3]{2}+1\right)=\sqrt[3]{3}$, apoi înmulţim cu $\sqrt[3]{9}$.
Deducem egalitatea

$$\sqrt[3]{9\left(\sqrt[3]{2}-1\right)}=\frac{3}{\sqrt[3]{2}+1}.$$

Prin raţionalizarea numitorului fracţiei din membrul drept, deducem

$$\sqrt[3]{9\left(\sqrt[3]{2}-1\right)}=\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1.$$

Prin împărţire cu $\sqrt[3]{9}$ se obţine:

$$\sqrt[3]{\frac{1}{9}}-\sqrt[3]{\frac{2}{9}}+\sqrt[3]{\frac{4}{9}}=\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1},$$

identitate a lui Ramanujan.

Observaţii.

1. Identitatea lui Ramanujan este citată în eleganta lucrare [3], la pag. 17, apoi este demonstrată direct prin ridicare la puterea a III-a.

2. Editarea celor 4 caiete de notiţe ale lui Ramanujan a început în anul 1926 şi este în prezent aproape încheiată. Descifrarea şi interpretarea rezultatelor nu a fost realizată decât în mică măsură, deoarece fiecare rând reclamă un studiu special.

Pentru a cunoaşte mai bine biografia matematicianului Ramanujan, care ne-a lăsat o operă imensă, formată din peste 3900 de egalităţi, identităţi, serii, formule şi teoreme de matematică, vă invităm să vizionaţi filmul recent apărut (2015): "The man who knew Infinity".

3. În lucrarea [2], regretatul academician Solomon Marcus scria: "Multe idei şi rezultate matematice abia acum, prin asociere cu calculatorul, îşi pot arăta forţa. Un exemplu tipc în acest sens îl constituie numeroase rezultate ale lui S. Ramanujan din caietele sale, care abia acum se publică" (pag. 254).

”În manuscrisele lui Ramanujan din al doilea deceniu al secolului trecut se află şi ideea algoritmilor iterativi, recent dezvoltaţi (exprimaţi ca programe de calculator care efectuează repetat aceleaşi operaţii aritmetice, luând ieşirea dintr-un ciclu drept intrare în ciclul următor)” (pag. 277).

Bibliografie

[1] Hardy G.H., *Crezul meu? Matematica!*, Editura Enciclopedică Română, Bucureşti, 1970
[2] Marcus S., *Paradigme universale*, Ed. Paralela 45, Piteşti, 2011
[3] Oprea M., *Două genii matematice*, Fundaţia oamenilor de ştiinţă Prahova, Ploieşti, 2014

Lector dr., Universitatea ”Dimitrie Cantemir” Bucureşti
Profesoară, Bucureşti

Argument 18

Asupra unor inegalităţi

Andrei Eckstein

Abstract. While studying an inequality given this year at the "Cezar Ivănescu" contest, we found an interesting method for solving others.

La concursul "Cezar Ivănescu" din acest an, desfăşurat la Târgovişte, s-a dat la clasa a IX-a următoarea problemă:

Problema 1.
Se consideră $x_i > 0$, $i = \overline{1,n}$, $n \geq 2$, cu proprietatea $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+x_i} = 1$.
Să se demonstreze inegalitatea

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_i} \geq (n-1) \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{x_i}}.$$

Concursul Vojtech Jarnik, 2002

Soluţia din barem este destul de complicată.
Va prezentăm o soluţie mai simplă, publicată în [1], bazată pe o idee care se poate aplica şi la alte inegalităţi, după cum se va vedea mai jos.

Soluţie. Din ipoteză rezultă că $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{1+x_i} = \sum_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{1+x_i}\right) = n-1$, prin urmare inegalitatea de demonstrat se scrie echivalent

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_i} \cdot \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{1+x_j} \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{x_i}} \cdot \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{1+x_j}.$$

Efectuând înmulţirile, termenii $\sqrt{x_i} \cdot \dfrac{1}{1+x_i} = \dfrac{1}{\sqrt{x_i}} \cdot \dfrac{x_i}{1+x_i}$ se reduc.
Este suficient ca, pentru fiecare pereche (i,j) cu $1 \leq i < j \leq n$ să demonstrăm că $\sqrt{x_i} \cdot \dfrac{1}{1+x_j} + \sqrt{x_j} \cdot \dfrac{1}{1+x_i} \geq \dfrac{1}{\sqrt{x_i}} \cdot \dfrac{x_j}{1+x_j} + \dfrac{1}{\sqrt{x_j}} \cdot \dfrac{x_i}{1+x_i}$, deoarece adunând aceste relaţii o obţinem pe cea din enunţ. Aducând la acelaşi numitor, relaţia precedentă revine la

$$x_i(1+x_i)\sqrt{x_j} + x_j(1+x_j)\sqrt{x_i} \geq (1+x_j)x_i\sqrt{x_i} + (1+x_i)x_j\sqrt{x_j},$$

adică la $\left(\sqrt{x_i x_j} - 1\right)(x_i - x_j)\left(\sqrt{x_i} - \sqrt{x_j}\right) \geq 0$, ceea ce este adevărat fiindcă

$$\frac{1}{1+x_i} + \frac{1}{1+x_j} \leq 1 \Leftrightarrow 1 + x_i + 1 + x_j \leq 1 + x_i + x_j + x_i x_j \Leftrightarrow x_i x_j \geq 1.$$

Aceeaşi idee poate fi folosită şi la rezolvarea următoarei probleme:

Problema 2 (vezi [2]).

Demonstraţi că, dacă $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, iar $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (0, \infty)$ sunt astfel încât $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+x_k} \geq n-1$, atunci $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} \geq n(n-1)$.

Lucian Tuţescu, Concursul "Gh. Dumitrescu", 2005 (enunţ parţial)

Enunţul complet propunea demonstrarea convexităţii funcţiei $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{1+x}$, iar soluţia oficială din concurs folosea această convexitate.

O altă idee este să observăm mai întâi că $\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{1+x_k} = n - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+x_k} \leq 1$, prin urmare este suficient să demonstrăm că

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+x_i} \cdot \sum_{j=1}^{n} 1 \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{1+x_i} \cdot \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x_j}. \qquad (*)$$

Într-adevăr, odată demonstrată această inegalitate, din ea rezultă că

$$n(n-1) \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+x_i} \cdot \sum_{j=1}^{n} 1 \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{1+x_i} \cdot \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x_j} \leq \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x_j}$$

şi concluzia.

Va propunem două abordari pentru demonstrarea inegalităţii $(*)$:

1. Folosind inegalitatea lui Cebâşev: deoarece funcţiile $x \mapsto \frac{1}{x}$ şi $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ sunt descrescătoare pe $(0, \infty)$, iar $\frac{x}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x}$, deci $x \mapsto \frac{x}{1+x}$ este crescătoare pe $(0, \infty)$, dacă aranjăm numerele x_k în ordine crescătoare, atunci numerele $\frac{1}{x_k}$ vor fi în ordine descrescătoare, în vreme ce numerele $\frac{x_k}{1+x_k}$ vor fi în ordine crescătoare.

Aplicând inegalitatea lui Cebâşev vom obţine tocmai inegalitatea $(*)$. Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = \frac{1}{n-1}$.

2. Folosind ideea de la problema de mai sus:

Efectuând înmulţirile în $(*)$, termenii $\frac{1}{1+x_k} \cdot 1 = \frac{x_k}{1+x_k} \cdot \frac{1}{x_k}$ se reduc. Este suficient ca, pentru fiecare pereche (i, j) cu $1 \leq i < j \leq n$ să demonstrăm că

$$\frac{1}{1+x_j} + \frac{1}{1+x_i} \leq \frac{1}{x_i} \cdot \frac{x_j}{1+x_j} + \frac{1}{x_j} \cdot \frac{x_i}{1+x_i},$$

deoarece adunând aceste relaţii o obţinem pe cea din enunţ. Aducând la acelaşi numitor, relaţia precedentă revine la

$$x_i x_j(1+x_i)+x_i x_j(1+x_j)\le x_j^2(1+x_i)+x_i^2(1+x_j),$$

echivalent cu $2x_i x_j \le x_i^2+x_j^2$, ceea ce este evident.

Observaţie. Înlocuind în inegalitatea de mai sus x_k cu $\frac{1}{x_k}$, obţinem că dacă $n\in\mathbb{N}$, $n\ge 2$, iar $x_1,x_2,\ldots,x_n\in(0,\infty)$ sunt astfel încât $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{x_k}{1+x_k}\ge n-1$, atunci $\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}x_k}{n}\ge n-1$.

Problema **27146** din G.M. nr. 11/2015 cere o inegalitate mai tare (autor tot *Lucian Tuţescu*:

Problema 3.

Dacă $n\in\mathbb{N}$, $n\ge 2$, iar $x_1,x_2,...,x_n\in(0,\infty)$ sunt astfel încât $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{x_k}{1+x_k}=n-1$, atunci

$$\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}\ge n-1. \tag{$**$}$$

Este evident că dacă inegalitatea are loc pentru $x_1,x_2,\ldots,x_n\in(0,\infty)$ astfel încât $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{x_k}{1+x_k}=n-1$, atunci ea are loc şi pentru numere cu $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{x_k}{1+x_k}\ge n-1$, aşa încât din inegalitatea mediilor se vede că inegalitatea din G.M. este mai tare decât cea din Problema 2.

O altă abordare care merge foarte bine atât la Problema 2 cât şi la Problema 3: Să notăm cu $a_k=\frac{x_k}{1+x_k}$. Astfel, condiţia devine mult mai frumoasă şi mai uşor de exploatat: $\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\le 1$.

Concluzia devine, ce-i drept, mai complicată: $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1-a_k}{a_k}\ge n(n-1)$.

Dar acum inegalitatea rezultă imediat din inegalitatea dintre media aritmetică şi cea armonică:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1-a_k}{a_k}=-n+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\ge -n+\frac{n^2}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\ge -n+n^2.$$

Pentru Problema 3, substituţia $a_k=\frac{1}{1+x_k}$ duce la concluzia

$$\prod_{k=1}^{b}\frac{1-a_k}{a_k}\ge(n-1)^n.$$

Dar $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = 1$ implică

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{1-a_k}{a_k} = \frac{a_2+a_3+\cdots+a_n}{a_1} \cdot \frac{a_1+a_3+\cdots+a_n}{a_2} \cdot \ldots \cdot \frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}{a_n}.$$

Prin urmare este suficient să demonstrăm că

$$\frac{a_2+a_3+\cdots+a_n}{a_1} \cdot \frac{a_1+a_3+\cdots+a_n}{a_2} \cdot \ldots \cdot \frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}{a_n} \geq (n-1)^n.$$

Această inegalitate (care pentru $n = 3$ este foarte cunoscuta inegalitate a lui Cesàro) se demonstrează uşor, aplicând pentru numărătorul fiecărei fracţii inegalitatea mediilor.

Cu o substituţie simplă, se vede că inegalitatea $(**)$ este echivalentă cu următoarea cunoscută inegalitate, dată la Olimpiadă în Vietnam în 1998:

Problema 4. Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n \geq 2)$ numere pozitive cu proprietatea

$$\frac{1}{x_1+1998} + \frac{1}{x_2+1998} + \cdots + \frac{1}{x_n+1998} = \frac{1}{1998}.$$

Demonstraţi că

$$\frac{\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}}{n-1} \geq 1998.$$

Soluţie. Avem

$$\frac{1}{x_2+1998} + \cdots + \frac{1}{x_n+1998} = \frac{1}{1998} - \frac{1}{x_1+1998} = \frac{x_1}{1998(x_1+1998)},$$

de unde, cu inegalitatea mediilor, rezultă

$$\frac{x_1}{1998(x_1+1998)} \geq \frac{n-1}{\sqrt[n-1]{(x_2+1998)(x_3+1998)\ldots(x_n+1998)}}.$$

Înmulţind această inegalitate cu inegalităţile analoage, obţinem

$$\frac{x_1 x_2 \ldots x_n}{1998^n (x_1+1998)(x_2+1998)\ldots(x_n+1998)} \geq \frac{(n-1)^n}{(x_1+1998)(x_2+1998)\ldots(x_n+1998)},$$

de unde rezultă imediat inegalitatea dorită.

Soluţia Problemei 3, publicată în G.M.-B, nr. 5/2016, este tocmai adaptarea celei de mai sus.

Mai jos aveţi un alt exemplu de inegalitate, care se poate demonstra prin această idee a ”spargerii după perechile de indici”. Mai multe exemple găsiţi în paragraful omonim din [3].

Problema 5. Arătaţi că
$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i y_i}{x_i+y_i}\right)$$
pentru orice $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ şi $y_1, y_2, \ldots, y_n > 0$.

Cristinel Mortici, [5]

Bibliografie

[1] R.M.T. nr. 4/2015

[2] Dragomir Lucian, *Exerciţii şi probleme de matematică pentru clasa a X-a* (*şi nu numai*), Ed. Bîrchi, 2011

[3] Drîmbe Mihai Onucu, *Inegalităţi–Idei şi metode*, Ed. GIL, 2003, &4.5

[4] G.M.-B nr. 11/2015

[5] Mortici Cristinel, 600 *de probleme de matematică pentru concursuri*, Ed. GIL, 2001

Profesor, Universitatea Politehnică Timişoara

O nouă metodă de abordare a unei clase de inegalităţi

Leonard Giugiuc şi Daniel Sitaru

Abstract. In this paper we develop a new technique for solving inequalities which involves a symmetrical function:

$$F(\sqrt[n]{x+y}, \sqrt[n]{y+z}, \sqrt[n]{z+x}); x,y,z \geq 0, n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

This technique is used to prove two properties, several problems and to propose some interesting questions.

În cele ce urmează vom dezvolta o metodă inedită de explicitare a funcţiilor simetrice de tipul $F(\sqrt[n]{x+y}, \sqrt[n]{y+z}, \sqrt[n]{z+x})$ unde $x,y,z \geq 0$ şi $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Astfel se reuşeşte (în demonstrarea unor inegalităţi mai ales) ca expresii foarte dificile să fie reduse la funcţii polinomiale sau raţionale de trei variabile pozitive.

Vom introduce:

Propoziţia 1. *Fie numerele reale nenegative x, y şi z astfel ca*

$$(x+y)(y+z)(z+x) \neq 0.$$

Atunci numerele $\sqrt{x+y}, \sqrt{y+z}, \sqrt{z+x}$ pot fi lungimile laturilor unui triunghi neobtuzunghic.

Leonard Giugiuc

Demonstraţie. Fără a pierde generalitatea, vom presupune că $x \geq y \geq z$; vom nota $\sqrt{y+z} = u, \sqrt{z+x} = v$ şi $\sqrt{x+y} = w$.
Evident că $u, v, w > 0$. Cum $x \geq y \geq z$, este suficient să arătăm că

$$\sqrt{x+y} < \sqrt{y+z} + \sqrt{z+x} \Leftrightarrow 2z + 2\sqrt{(y+z)(z+x)} > 0$$

ceea ce este evident adevărat. De aici deducem că, unghiul de măsura maximă al triunghiului astfel format, este cel opus laturii de lunghime w. Vom demonstra că măsura acestui unghi nu depăşeşte 90°. Într-adevăr, $v^2 + u^2 - w^2 = 2z \geq 0$, deci demonstraţia teoremei este completă.

Cu ajutorul Propoziţiei 1 vom demonstra doua aplicaţii cu un nivel foarte ridicat de dificultate.

Aplicaţie - BMO 2012. Să se demonstreze că pentru orice numere reale strict pozitive are loc inegalitatea

$$\sqrt{x+y} \cdot \sqrt{y+z} \cdot \sqrt{z+x}(\sqrt{x+y} + \sqrt{y+z} + \sqrt{z+x}) \geq 4(xy+yz+zx).$$

Soluţie. (Leonard Giugiuc) Conform Propoziţiei 1, numerele $\sqrt{x+y}, \sqrt{y+z}, \sqrt{z+x}$ sunt lungimile laturilor unui triunghi neobtuzunghic.

Argument 18

În virtutea teoremei lui Ravi, există numerele reale strict pozitive, a, b şi c pentru care $\sqrt{x+y} = a+b$, $\sqrt{y+z} = b+c$ şi $\sqrt{z+x} = c+a$.
Mai mult, folosind formula lui Heron se arată că

$$16\Delta^2 = 4(xy + yz + zx),$$

unde Δ este aria triunghiului format. În altă ordine de idei, folosind aceeaşi formulă, obţinem

$$16\Delta^2 = 16abc(a+b+c).$$

Deci avem de arătat că

$$2(a+b)(b+c)(c+a)(a+b+c) \geq 16abc(a+b+c) \Leftrightarrow$$
$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc.$$

Din inegalitatea mediilor obţinem că $a+b \geq 2\sqrt{ab}$, $b+c \geq 2\sqrt{bc}$ şi $c+a \geq 2\sqrt{ca}$. Prin înmulţirea acestor 3 relaţii avem $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$. Aşadar problema este rezolvată.

Aplicaţie (Leonard Giugiuc). Fie numerele reale nenegative x, y şi z. Are loc inegalitatea:

$$5\left(\sum_{cyc}\sqrt{x+y}\right)\left(\sum_{cyc}\sqrt{(x+y)(y+z)}\right) \geq$$
$$\geq \left(\sum_{cyc}\sqrt{x+y}\right)^3 + 18\sqrt{(x+y)(y+z)(z+x)}.$$

Demonstraţie. Daca $(x+y)(y+z)(z+x) = 0$, atunci avem de arătat că $10a\sqrt{a} \geq 8a\sqrt{a}$, ceea ce este evident adevărat $\forall\, a \geq 0$.
Presupunem că $(x+y)(y+z)(z+x) \neq 0$. Din Propoziţia 1, $\sqrt{x+y}$, $\sqrt{y+z}$ şi $\sqrt{z+x}$ sunt lungimile laturilor unui triunghi neobtuzunghic.

Aplicând din nou Ravi, avem că: $\sqrt{x+y} = a+b$, $\sqrt{y+z} = b+c$ şi $\sqrt{z+x} = c+a$, cu $a, b, c > 0$. Obţinem

$$5\left(\sum_{cyc}\sqrt{x+y}\right)\cdot\sum_{cyc}\sqrt{(x+y)(y+z)}$$
$$\geq \left(\sum_{cyc}\sqrt{x+y}\right)^3 + 18\sqrt{(x+y)(y+z)(z+x)} \Leftrightarrow$$

$$5(a+b+c)[a^2+b^2+c^2+3(ab+bc+ca)] \geq 4(a+b+c)^3 + 9(a+b)(b+c)(c+a). \quad (1)$$

Notăm $a^3+b^3+c^3 = S$, $ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a) = s$ şi $abc = p$.
Relaţia (1) devine

$$5S + 5s + 15s + 45p \geq 4S + 12s + 24p + 9s + 18p \Leftrightarrow S + 3p \geq s.$$

Dar, conform teoremei lui Schur, $S + 3p \geq s$. Astfel, demonstraţia este încheiată.

Propoziţia 2. *Fie $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Dacă $x, y, z \in (0, \infty)$, atunci numerele $\sqrt[n]{x+y}$, $\sqrt[n]{y+z}$, $\sqrt[n]{x+z}$ pot fi laturile unui triunghi.*

Daniel Sitaru

Demonstraţie. Presupunem că $x \geq y \geq z$. Este suficient să arătăm că:

$$\sqrt[n]{x+y} < \sqrt[n]{x+z} + \sqrt[n]{y+z}.$$

Dar

$$\sqrt[n]{x+y} < \sqrt[n]{x+z} + \sqrt[n]{y+z} \Leftrightarrow$$

$$x+y < x+z+y+z+\sum_{k=1}^{n-1} C_n^k (\sqrt[n]{x+z})^{n-k} (\sqrt[n]{y+z})^k \Leftrightarrow$$

$$0 < 2z + \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k (\sqrt[n]{x+z})^{n-k} (\sqrt[n]{y+z})^k$$

adevărat.

Aplicaţie (Dana Heuberger şi Daniel Sitaru).
Să se arate că dacă $x, y, z \in (0, \infty)$ atunci:

$$\sum (x+y)\sqrt{x+y}(\sqrt{y+z} + \sqrt{z+x}) \geq 8 \sum x\sqrt{yz}.$$

Soluţie. Reamintim inegalitatea lui Muirhead, pe care o vom folosi în continuare:

M. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $p_1, p_2, \dots p_n, q_1, q_2, \dots q_n \in \mathbb{R}$ şi $x_1, x_2, \dots, x_n \in (0, \infty)$, cu proprietăţile:

1) $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_n$ şi $q_1 \geq q_2 \geq \dots \geq q_n$.
2) $p_1 \geq q_1$, $p_1 + p_2 \geq q_1 + q_2, \dots, p_1 + p_2 + \dots p_{n-1} \geq q_1 + q_2 + \dots q_{n-1}$
3) $p_1 + p_2 + \dots p_n = q_1 + q_2 + \dots q_n$.

Atunci,

$$\sum_{\sigma \in S_n} x_{\sigma(1)}^{p_1} \cdot x_{\sigma(2)}^{p_2} \cdot \dots \cdot x_{\sigma(n)}^{p_n} \geq \sum_{\sigma \in S_n} x_{\sigma(1)}^{q_1} \cdot x_{\sigma(2)}^{q_2} \cdot \dots \cdot x_{\sigma(n)}^{q_n}.$$

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $(p_1, p_2, \dots p_n) = (q_1, q_2, \dots q_n)$ sau $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Observaţie. Dacă $p = (p_1, p_2, \dots p_n) \in \mathbb{R}^n$ şi $q = (q_1, q_2, \dots q_n) \in \mathbb{R}^n$ verifică condiţiile din ipoteză, atunci spunem că p majorează q şi scriem $p \succ q$.

Revenim la soluţia problemei:

Pentru $n = 3$, alegem $p = (3, 1, 0)$ şi $q = (2, 2, 0)$. Avem $p \succ q$.
Alegem $a = \sqrt{x+y}$, $b = \sqrt{y+z}$, $c = \sqrt{z+x}$.

Folosind inegalitatea lui Muirhead, obţinem:

$$a^3b + b^3a + c^3b + b^3c + c^3a + a^3c \geq 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \Leftrightarrow$$

$$\sum a^3(b+c) \geq 2\sum(x+y)(y+z) \geq 2\sum 2\sqrt{xy}\cdot 2\sqrt{yz}$$

$$= 8\sum y\sqrt{xz} = 8\sum x\sqrt{yz}.$$

Aplicaţie (Daniel Sitaru). Să se arate că dacă $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ şi $x, y, z \in (0, \infty)$ atunci:

$$\frac{\sum \sqrt[n]{(x+y)^4}}{\sum \sqrt[n]{x+y}} \geq \sqrt[n]{(x+y)(y+z)(z+x)}.$$

Soluţie. Fie $a = \sqrt[n]{x+y}; b = \sqrt[n]{y+z}; c = \sqrt[n]{z+x}$. Inegalitatea devine:

$$\frac{a^4+b^4+c^4}{a+b+c} \geq abc.$$

Dar $a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq abc\,(a+b+c)$.
Aşadar,

$$\frac{\sum \sqrt[n]{(x+y)^4}}{\sum \sqrt[n]{x+y}} \geq \sqrt[n]{(x+y)(y+z)(z+x)}.$$

Aplicaţie (Daniel Sitaru). Să se arate că dacă $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ şi $x, y, z \in (0, \infty)$ atunci:

$$\sum \sqrt[n]{(x+y)^3}(\sqrt[n]{y+z} + \sqrt[n]{z+x}) \geq 2\sum \sqrt[n]{(x+y)^2(y+z)^2}.$$

Soluţie. Alegem $a = \sqrt[n]{x+y}$; $b = \sqrt[n]{y+z}$; $c = \sqrt[n]{z+x}$. Inegalitatea devine:

$$\sum a^3(b+c) \geq 2\sum a^2b^2.$$

Folosind inegalitatea lui Muirhead, rezultă imediat că inegalitatea precedentă este adevarată.

Bibliografie

[1] Daniel Sitaru, Radu Gologan şi Leonard Giugiuc 300 *Romanian Mathematical Challenges*, Ed. Paralela 45, Piteşti, 2016
[2] Daniel Sitaru, *Math Phenomenon*, Ed. Paralela 45, Piteşti, 2016
[3] Cut The Knot, http://www.cut-the-knot.org
[4] Art Of Problem Solving (AoPS), http://www.artofproblemsolving.com

Profesor, C.N. "Traian", Drobeta Turnu Severin
Profesor, C.N. Economic "Theodor Costescu", Drobeta Turnu Severin

Argument 18

Unde este greşeala în calculul volumului unui cort?

Vasile Pop

Continuare din numărul anterior.

Abstract. In this article there are given three "solutions" of the same volume problems, resulting three different results. Where is the mistake?

3. Unde este greşeala? Comentarii şi concluzii

Prin cele patru metode, în care calculele sunt corecte, s-au obţinut o infinitate de valori posibile ale volumului cortului nostru. Evident, se pune întrebarea: care din rezultatele obţinute este corect sau dacă vreunul din ele este corect şi, în plus, care este explicaţia acestor rezultate diferite, aparent corecte?

Toate diferenţele apar din cauză că desenul, aparent clar, nu defineşte complet corpul cortului. Mai exact, în desenul dat se creează iluzia că feţele oblice ale cortului, $ABHG$ şi $DCHG$, sunt plane, ceea ce nu este adevărat decât în cazul $h_1 = h_2$, astfel că în cazul $h_1 \neq h_2$ punctele A, B, H, G şi respectiv D, C, H, G nu sunt coplanare.

a) În calculul volumului cu Metoda 1 s-a considerat (implicit) că fiecare faţă a cortului este ca un acoperiş "în două ape", cu schimbarea pantei pe diagonalele GB şi GC. Feţele laterale sunt generate de familia tuturor dreptelor care trec prin punctul fix G şi se sprijină pe segmentele $[AB] \cup [BH]$, respectiv $[DC] \cup [CH]$

b) În calculul volumului cu Metoda a 2-a, s-a considerat că fiecare faţă oblică este ca un acoperiş "în două ape", cu schimbarea de pantă (*dolia*) AH şi DH. Feţele laterale sunt generate de dreptele ce trec prin punctul fix H şi se sprijină pe segmentele $[BA] \cup [AG]$, respectiv $[CD] \cup [DG]$.

c) În calculul volumului cu Metoda a 3-a s-a considerat că fiecare faţă oblică este ca un acoperiş "în trei ape" format din câte trei porţiuni plane: triunghiurile GAM, AMB şi BMH, respectiv GDM, MDC şi MCH. Feţele laterale sunt generate de familia dreptelor ce trec prin punctul fix M şi se sprijină pe segmentele $[GA] \cup [AB] \cup [BH]$, respectiv pe segmentele $[GD] \cup [DC] \cup [CH]$.

d) În calculul volumului cu Metoda a 4-a s-a considerat că volumul este generat de familia triunghiurilor MNP, obţinute prin secţiunea "scheletului" cortului cu plane paralele cu faţa de intrare (BCH). Feţele laterale sunt generate de familia de drepte MN, cu $M \in [GH]$, $N \in [AB]$ şi $\dfrac{GM}{GH} = \dfrac{AN}{AB} = x \in [0, 1]$, respectiv MP, cu $P \in [DC]$ şi $\dfrac{DP}{DC} = x \in [0, 1]$.

Aceste suprafeţe sunt porţiuni din nişte suprafeţe clasice, numite paraboloizi hiperbolici (suprafeţe algebrice de gradul II).
Calculul acestui volum se poate face folosind calculul integral:

$$V = \int_0^a S_{MNP} dx,$$

unde $x = EX$ şi $S_{MNP} = \frac{b}{2}\left(\left(1 - \frac{x}{a}\right)h_2 + \frac{x}{a}h_1\right)$ şi se obţine $V = \frac{ab(h_1 + h_2)}{4}$.

În concluzie, dacă desenul se face cu toate detaliile necesare, oricare din cazurile tratate dă rezultat corect.
Ţinând cont că s-a precizat că acest cort este făcut din pânză şi că un fir suspendat într-un punct M de pe bara $[GH]$ şi care se sprijină pe bara $[AB]$, sub acţiunea gravitaţiei ajunge în poziţia MN (analizată în Metoda a 4-a şi punctul d)), rezultă că cel mai probabil volumul cortului se calculează după formula $V = \frac{ab(h_1 + h_2)}{4}$.

Bibliografie

[1] Mincu G., Pop V., *Concursul Naţional Studenţesc "Traian Lalescu"*, ed. 2013, G.M.-A, nr. 3–4/2013, problemele B1 şi C3, pag. 25–34

[2] Pop V., *Algebră liniară şi geometrie analitică*, Ed. Mega, 2012 (cap. 9, Generări de suprafeţe)

[3] Pop V., *Culegere de probleme de algebră liniară şi geometrie analitică*, Ed. Mega, 2011 (cap. 12, Geometrie analitică)

Conf. univ. dr., Universitatea Tehnică Cluj-Napoca

Argument 18

Aplicaţii ale unui algoritm pentru calculul rangului unei matrice

Rică Zamfir

Abstract. The article presents some applications of a new method for computing the rank of a matrix.

În cele ce urmează dorim să prezentăm un algoritm mai puţin cunoscut pentru aflarea rangului unei matrice şi să ilustrăm acest algoritm prin câteva exemple.

Definiţia 1. Fie $(K,+,\cdot)$ un corp şi $A=(a_{ij})\in M_{m\times n}(K)$ o matrice nenulă. Se spune că rangul matricei A este r dacă există în matricea A un minor nenul de ordin r şi toţi minorii de ordin strict mai mare (dacă există) sunt nuli.
Prin definiţie, rangul matricei nule $0_{m,n}$ este 0.

Practic, rangul unei matrice A este egal cu numărul de linii (coloane) liniar independente ale matricei A.

Există mai multe metode prin care putem calcula rangul unei matrice:

1. Metoda bordării

Metoda bordării se bazează pe următoarea teoremă:

Teorema 1. *Fie $K,+,\cdot)$ un corp şi $A=(a_{ij})\in M_{m\times n}(K)$ o matrice nenulă. Atunci rangul matricei A este r dacă şi numai dacă există în matricea A un minor nenul de ordin r şi toţi minorii de ordin egal cu $r+1$ (dacă există) sunt nuli.*

În practică, se pleacă de la un minor de ordinul 1 nenul, care este un element $\neq 0$ din matrice. Se bordează acesta cu o linie şi cu o coloană. Dacă determinantul astfel obţinut este 0, se construieşte un alt determinant de ordinul 2. Dacă toţi determinanţii de ordinul 2 sunt 0, atunci $rangA=1$. Dacă există un minor de ordinul 2 nenul, se construieşte prin bordare un minor de ordinul 3. Procedeul continuă până la găsirea unui minor de ordinul $r\neq 0$ şi toţi minorii de ordinul $r+1$ egali cu 0. În această situaţie avem $rangA=r$.

2. Metoda transformărilor elementare

Prin transformări elementare pe linii într-o matrice înţelegem următoarele operaţii pe care le efectuăm:

a) Schimbarea între ele a două linii.

b) Înmulţirea unei linii cu un element nenul $a\in K$.

c) Adunarea elementelor unei linii la elementele altei linii.

Analog se definesc transformările elementare pe coloane.

Metoda transformărilor elementare se bazează pe următoarea teoremă ([3], pag. 109):

Teorema 2. *Fie* $(K,+,\cdot)$ *un corp şi* $A=(a_{ij})\in M_{m\times n}(K)$ *o matrice nenulă. Următoarele afirmaţii sunt echivalente*:

i) $rang A = r$

ii) Există o succesiune de transformări elementare pe linii şi pe coloane prin care matricea A *se transformă în matricea cu blocuri* $B=\begin{pmatrix} I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

În practică, pentru determinarea rangului prin această metodă, procedăm astfel: se efectuează transformări elementare asupra matricei A până când toate elementele matricei devin nule, cu excepţia unor elemente de pe diagonala principală care devin 1. Rangul matricei A este atunci egal cu numărul elementelor egale cu 1 situate pe diagonala principală.

3. Metoda dominoului

Am găsit în AMM un rezultat interesant care ne permite să calculăm mai uşor (în unele cazuri) rangul unei matrice. Această nouă metodă de calcul a rangului, pe care am numit-o metoda dominoului, este dată de următoarea teoremă:

Teorema 3. *Fie* $(K,+,\cdot)$ *un corp şi* $A=(a_{ij})\in M_{m\times n(K)}$, *cu* $a_{11}\neq 0$. *pentru fiecare pereche* i,j *de indici cu* $1\leq i\leq m$ *şi* $1\leq j\leq n$ *definim determinantul* $d_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{ij}\\ a_{i1} & a_{ij}\end{vmatrix}$. *Atunci:*

$$rang A = 1 + rang\begin{pmatrix} d_{22} & \dots & d_{2n}\\ \dots & \dots & \dots\\ d_{m2} & \dots & d_{mn}\end{pmatrix}$$

Demonstraţie (după [1]). Pentru început înmulţim liniile $2,3,\dots,m$ ale matricei A cu a_{11}. Obţinem:

$$A\approx\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{11}a_{21} & a_{11}a_{22} & \dots & a_{11}a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{11}a_{m1} & a_{11}a_{m2} & \dots & a_{11}a_{mn}\end{pmatrix}$$

În această nouă matrice, pentru fiecare indice i, cu $2\leq i\leq m$ scădem din linia i linia 1 înmulţită cu a_{i1}. Găsim:

$$A\approx\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ 0 & d_{22} & \dots & d_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & d_{m2} & \dots & d_{mn}\end{pmatrix}.$$

Deoarece $a_{11}\neq 0$, prima linie a ultimei matrice nu este o combinaţie liniară a celorlalte linii, ceea ce demonstrează concluzia.

Observaţie. 1. Condiţia $a_{11} \neq 0$ nu este restrictivă, deoarece dacă matricea A este nenulă, putem permuta linii şi/sau coloane astfel încât să avem $a_{11} \neq 0$, iar aceste permutări nu schimbă rangul.

2. Metoda expusă în teoremă se poate aplica din aproape în aproape (din acest motiv am numit-o metoda dominoului), până găsim o matrice de ordinul 2, al cărei rang se determină imediat.

4. Aplicaţii

1. Aflaţi rangul matricei $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 5 & 3 \\ -1 & 5 & 2 & 8 \end{pmatrix}$ prin toate cele trei metode prezentate.

Soluţie. *i*) Metoda bordării

Alegem elementul $a_{11} = 2$, pe care îl bordăm obţinând $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$.

Considerăm apoi $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 10 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} = -7 \neq 0.$

Bordăm acum pe Δ_2 şi obţinem:

$$\Delta_3 = \det A = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 5 & 3 \\ -1 & 5 & 2 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 14 & 7 & 21 \\ 0 & 7 & 3 & 10 \\ 0 & 16 & 11 & 27 \\ -1 & 5 & 2 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 14 & 7 & 21 \\ 7 & 3 & 10 \\ 16 & 11 & 27 \end{vmatrix}$$

$$= 7 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 7 & 3 & 10 \\ 16 & 11 & 17 \end{vmatrix} = 7 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ -6 & 11 & -6 \end{vmatrix} = -7 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -6 & -6 \end{vmatrix} = 0$$

Aşadar $rang A = 3$.

ii) Metoda transformărilor elementare

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 5 & 3 \\ -1 & 5 & 2 & 8 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{cases} L_1 \to L_1 + L_4 \\ L_2 \to L_2 + L_4 \\ L_3 \to L_3 + 3L_4 \end{cases} \begin{pmatrix} 1 & 9 & 5 & 13 \\ 0 & 7 & 3 & 10 \\ 0 & 16 & 11 & 17 \\ -1 & 5 & 2 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 9 & 5 & 13 \\ 0 & 7 & 3 & 10 \\ 0 & 16 & 11 & 27 \\ 0 & 14 & 7 & 21 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{cases} C_2 \to C_2 - 9C_1 \\ C_3 \to C_3 - 5C_1 \\ C_4 \to C_4 - 13C_1 \end{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 3 & 10 \\ 0 & 16 & 11 & 27 \\ 0 & 14 & 7 & 21 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{cases} L_2 \to \dfrac{1}{7} L_2 \\ L_3 \to L_3 - 16L_2 \\ L_4 \to L_4 - 14L_2 \end{cases} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dfrac{3}{7} & \dfrac{10}{7} \\ 0 & 0 & \dfrac{29}{7} & \dfrac{29}{7} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{cases} C_3 \to C_3 - \dfrac{3}{7} C_2 \\ C_4 \to C_4 - \dfrac{10}{7} C_2 \end{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{29}{7} & \dfrac{29}{7} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{cases} L_3 \to \dfrac{7}{29} L_3 \\ L_4 \to L_4 - L_3 \end{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \{C_4 \to C_4 \to C_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Am găsit prin urmare că $rangA = 3$.

iii) Metoda dominoului

$$rangA = 1 + rang \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -10 & 1 & -9 \\ 14 & 7 & 21 \end{pmatrix} = 2 + rang \begin{pmatrix} -10 & -10 \\ 14 & 14 \end{pmatrix} = 3.$$

2. Aflaţi rangul matricelor:

$a)\ A = \begin{pmatrix} 3 & -8 & 7 \\ 5 & -4 & 9 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

Soluţie.

$$rangA = 1 + rang \begin{pmatrix} -12+40 & 27-35 \\ 9+16 & 18-14 \end{pmatrix} = 1 + rang \begin{pmatrix} 28 & -8 \\ 25 & 4 \end{pmatrix} = 3.$$

$b)\ A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 6 \\ 6 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & -12 & 5 \\ 2 & 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$

Soluţie.

$$\begin{aligned}
rang A &= 1 + rang \begin{pmatrix} 8-18 & 0+30 & 8-36 \\ 20-9 & -48+15 & 20-18 \\ 8-6 & -16+10 & 8-12 \end{pmatrix} \\
&= 1 + rang \begin{pmatrix} -10 & 30 & -28 \\ 11 & -33 & 2 \\ 2 & -6 & -4 \end{pmatrix} \\
&= 2 + rang \begin{pmatrix} 330-330 & -20+308 \\ 60-60 & 40+56 \end{pmatrix} = 2 + rang \begin{pmatrix} 0 & 288 \\ 0 & 96 \end{pmatrix} = 3.
\end{aligned}$$

$c)$ $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & -4 & 1 & -4 \\ 3 & 3 & -2 & 4 & -7 \\ 3 & -3 & 4 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -10 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

([2] pag. 125 Exerciţiul 1d)

Soluţie.

$$\begin{aligned}
rang A &= 1 + rang \begin{pmatrix} 6 & -10 & -1 & -14 \\ 6 & -10 & -1 & -32 \\ -6 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & -20 & -2 & 8 \end{pmatrix} \\
&= 2 + rang \begin{pmatrix} 0 & 0 & -108 \\ -48 & 0 & -108 \\ -120 & -12 & 48 \end{pmatrix} = 3 + rang \begin{pmatrix} 0 & -48 \cdot 108 \\ 0 & -108 \cdot 120 \end{pmatrix} = 4.
\end{aligned}$$

3. Determinaţi rangul matricelor următoare. Discuţie.

$a)$ $A = \begin{pmatrix} 2 & m & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 2m & m \\ 2 & 10 & -12 & 1 \end{pmatrix}$, unde $m \in \mathbb{R}$.

([3], vol. 3, pag. 55, Exerciţiul 61)

Soluţie.

$$\begin{aligned}
rang A = 1 + rang \begin{pmatrix} -2-4m & 4m+8 & 2 \\ 20-2m & 20 & -2 \end{pmatrix} = 2 \\
= rang \begin{pmatrix} 8m^2 - 144m - 200 & 12m - 36 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Dacă $m \neq 3$, atunci $12m - 36 \neq 0$, deci $rang A = 3$.
Dacă $m = 3$, avem $8m^2 - 144m - 200 \neq 0$, deci şi în acest caz $rang A = 3$.
Aşadar $rang A = 3$ pentru orice m real.

b) $A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta & 2 & 1 \\ \alpha & -2\beta & 3 & 1 \\ \alpha & -\beta & \beta - 3 & 2\beta - 1 \end{pmatrix}$ unde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

([2], pag. 126, Exerciţiul 2d (enunţ corectat))

Soluţie.

$$\begin{aligned} rang A &= 1 + rang \begin{pmatrix} \alpha(1-\beta) & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha(\beta - 5) & 2\alpha(\beta - 1) \end{pmatrix} \\ &= 2 + rang \left(\alpha^2(1-\beta)(\beta-5); \quad -2\alpha^2(\beta-1)^2 \right) \end{aligned}$$

i. Dacă $\alpha = 0$ iar $\beta \in \mathbb{R}$, $rang A = 2$.
ii. Dacă $\beta = 1$ iar $\alpha \in \mathbb{R}$, $rang A = 2$.
iii. Dacă $\alpha \neq 0$ şi $\beta \notin \{1, 5\}$, $rang A = 3$.

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma & \alpha & \beta \end{pmatrix}$ unde $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

([3], vol. 3, pag. 55, Exerciţiul 60)

Soluţie.

$$\begin{aligned} rang A &= 1 + rang \begin{pmatrix} -1 & 7 & -9 & -3 \\ \beta - \alpha & 2\alpha + \gamma & -3\alpha & \beta - 2\alpha \end{pmatrix} \\ &= 2 + rang \left(5\alpha - 7\beta - \gamma; \quad -6\alpha + 9\beta; \quad -\alpha + 2\beta \right) \end{aligned}$$

Dacă $\begin{cases} -\alpha + 2\beta = 0 \\ -6\alpha + 9\beta = 0 \\ 5\alpha - 7\beta - \gamma = 0 \end{cases}$ avem $rang A = 2$, iar în caz contrar avem $rang A = 3$.
Se obţine $rang A = 2 \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$, iar în celelalte cazuri avem $rang A = 3$.

Bibliografie

[1] Gerstein Larry J., *A New Algorithm for Computing the Rank of a Matrix*, American Mathematical Monthly, 1988, 950–952
[2] Năstăsescu C., Niţă C., Brandiburu M., Joiţa D., *Algebră, culegere de probleme pentru liceu*, Ed. RotechPro, 1996
[3] Petrică I., Lazăr I., *Probleme de algebră pentru liceu*, Editura Petrion, 1995
[4] Pop V., *Algebră liniară–matrice şi determinanţi–pentru elevi, studenţi şi concursuri*, Ed. Mediamira, 2007
[5] Matei P., *Algebră liniară, geometrie analitică şi diferenţială*, vol. I, Ed. Agir, 2002

Profesor, Colegiul National de Informatică "Tudor Vianu", Bucureşti

Tabăra judeţeană de matematică, Baia Mare, 2016

Organizatori: Inspectoratul Judeţean Maramureş, Centrul Judeţean pentru Tineri Capabili de Performanţă, Filiala MM a SSMR– preşedinte prof. univ. dr. Vasile Berinde.

Loc de desfăşurare: Universitatea Tehnică Cluj-Napoca, Centrul Universitar Nord, Baia Mare.

Directorul taberei: conf. dr. Andrei Horvat

Directori adjuncţi: prof. Vasile Ienuţaş pentru gimnaziu şi prof. Nicolae Muşuroia pentru liceu.

Profesori participanţi: *Bojor Florin, Bojor Meda, Boroica Gheorghe, Muşuroia Nicolae, Pop Adrian* de la C.N. "Gheorghe Şincai"; *Boroica Gabriela, Fărcaş Natalia, Darolţi Erika, Zlampareţ Horia* de la C.N. "Vasile Lucaciu"; *Longaver Ludovic* de la L.T. "Nemeth Laszlo"; *Cioclu Costel, Podină Camelia* de la L.T. "Emil Racoviţă"; *Pop Radu* de la Seminarul Teologic Liceal "Sf. Iosif Mărturisitorul"; *Fănăţan Nelu, Friedrich Gabriela, Horge Daniel, Zlampareţ Mihaela* de la C.E. "Nicoale Titulescu"; *Bunu Iulian* de la Liceul de Arte; *Brisc Viorica, Birta Adriana, Şerba Lucia* de la C.T. "Anghel Saligny"; *Hossu Călin* de la Şc. Gim. "Dimitrie Cantemir"; *Pop Adela* de la C.T. "Aurel Vlaicu"; *Pop Anca* de la C.T. "George Bariţiu"; *Polgar Corina* de la C.T. "C.D. Neniţescu"; *Pop Cosmin, Zah Ştefan* de la Şc. Gim. "George Coşbuc", *Neaga Nadina, Schweichoffer Clara* de la Şc. Gim. "Dr. Victor Babeş"; *Tomşa Magdalena* de la Şc. Gim. Dumbrăviţa; *Naghi Anamaria* de la Şc. Gim. "Lucian Blaga"; *Barbur Simona* de la Şc. Gim. "Vasile Alecsandri"; *Cadar Maria* de la Şc. Gim. "Simion Bărnuţiu"; *Kalisch Maria* de la Şc. Gim. "Octavian Goga"; *Râmbu Gheorghe*, matematician.

Clasa a IX-a

1. Dacă $a, b \in \mathbb{R}$ notăm $M(a,b) = \{n \in \mathbb{N}^* \mid [na] = [nb]\}$.

a) Determinaţi $M\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right)$.

b) Arătaţi că $M(a,b)$ este o mulţime infinită dacă şi numai dacă $a = b$.

2. Se consideră numerele reale pozitive x, y, z care verifică relaţia

$$x^2 + y^2 + z^2 = 27.$$

a) Arătaţia că

$$x(y-3)(z-3) + \frac{3}{2}[(y-z)^2 + (x-3)^2] = xyz - 3(xy + yz + zx) + 54.$$

b) Arătaţi că $3(xy + yz + zx) - xyz \leq 54$.

3. Fie ABC un triunghi înscris într-un cerc de centru O. Fie P şi Q simetricele ortocentrului şi a vârfului A faţă de mijlocul laturii BC. Arătaţi că

a) $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OP}$.

b) $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OP}$.

Subiectele au fost propuse şi selectate de:
Prof. Darolţi Erika, C.N. "Vasile Lucaciu"
Prof. Pop Radu, Seminarul Teologic Liceal "Sf. Iosif Mărturisitorul"

Clasa a X-a

1. *a*) Să se arate că funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 8^x - 4 - 2 \cdot 2^{x+1} + 5$ nu este injectivă.

b) Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel $f(f(x)) = x^3$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Să se arate că funcţia f este injectivă şi că $\{f(-1), f(1), f(0)\} = \{-1, 0, 1\}$.

2. Rezolvaţi ecuaţiile:

a) $\log_5 \left(1 + \sqrt[3]{x}\right) = \log_{64} x$.

b) $2^{x^4-4x+2} = \dfrac{x}{x^2+1}$.

3. *a*) Să se arate că $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$, $\forall x \in [-1, 1]$.

b) Să se rezolve în mulţimea numerelor reale inecuaţia

$$2^{\arcsin x} + 2^{\arccos x} \leq 2^{1+\frac{\pi}{4}}.$$

Subiectele au fost propuse şi selectate de:
Prof. Boroica Gabriela, C.N. "Vasile Lucaciu"
Prof. Boroica Gheorghe, C.N. "Gheorghe Şincai"

Clasa a XI-a

1. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. rezolvaţi ecuaţia matriceală:

$$X + X^3 + \cdots + X^{2n-1} = \begin{pmatrix} n & 0 \\ n^2 & n \end{pmatrix},\ X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

2. Se consideră şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ cu $x_0 > 0$ şi

$$x_n + \frac{1}{\sqrt[3]{x_n}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x_{n+1}}},\ n \in \mathbb{N}.$$

a) Arătaţi că şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este convergent;

b) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} n^3 x_n^4$.

3. Fie $\alpha \in \mathbb{R}$, $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu $\det(\alpha A + B) > 0$, $\det(A - \alpha B) > 0$. Arătaţi că

$$\frac{1}{\det(\alpha A + B)} + \frac{1}{\det(\alpha B - A)} \geq \frac{4}{(1+\alpha^2)\cdot(\det(A) + \det(B))}.$$

Subiectele au fost propuse şi selectate de:
Matematician Râmbu Gheorghe
Prof. Muşuroia Nicolae, C.N. "Gheorghe Şincai"

Clasa a XII-a

1. *a*) Să se rezolve ecuaţia $x^2 - 4x + \sqrt{x^2 - 4x + 7} = -1$.

b) Fie $ABCD$ un patrulater convex. Să se arate că $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$ dacă şi numai dacă $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$.

c) Să se determine probabilitatea ca, alegând un element al mulţimii $A = \{0, 5, 20, \ldots, 2015\}$, acesta să fie divizibil cu 25.

2. Fie $k \in \mathbb{Q}$, $G = \mathbb{R}\backslash\{k\}$ şi $x * y = xy - kx - ky + k^2 + k$, $\forall\, x, y \in G$. Admitem că $(G, *)$ este grup.

a) Determinaţi simetricul elementului $x = k - 1$.

b) Să se demonstreaze că $H = (k, \infty)$ este un subgrup al lui G.

c) Să se demonstreze că, dacă un subgrup I al lui H conţine toate numerele întregi din H, atunci I conţine toate numerele raţionale din H.

3. Se consideră funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{(x-1)(e^x - 2x)}{x^2 + e^{2x}}$.

a) Să se calculeze $\displaystyle\int \frac{e^{2x} + x}{e^{2x} + x^2}dx$ şi $\displaystyle\int \frac{xe^x - e^x}{x^2}dx$, $x > 0$.

b) Să se calculeze $\displaystyle\int f(x)dx$.

c) Să se calculeze $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^2 \int_0^1 g\left(\frac{x}{n}\right)dx$, unde $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \ln(1 + x^2)$.

Subiectele au fost propuse şi selectate de:
Prof. Meda Bojor, C.N. "Gheorghe Şincai"
Prof. Florin Bojor, C.N. "Gheorghe Şincai"

Clasa a XII-a M2

Subiectul I

1. Să se calculeze modulul numărului complex $z = \dfrac{(3+4i)^3}{(4+3i)^2}$.

2. Să se calculeze $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}$, ştiind că x_1 şi x_2 sunt rădăcinile ecuaţiei $x^2-3x-1=0$.

3. Să se rezolve ecuaţia $x^2-4x+\sqrt{x^2-4x+7}=-1$.

4. Să se determine probabilitatea ca, alegând la întâmplare o submulţime a mulţimii $\{1,2,3,4,5,6,7\}$, aceasta să nu conţină numere impare.

5. În reperul cartezian xOy, se consideră punctele $A(-1,3)$, $B(4,-1)$, $C(6,2)$. Să se determine coordonatele punctului D, astfel încât patrulaterul $ABCD$ să fie paralelogram.

6. Să se arate că, în orice triunghi dreptunghic ABC cu ipotenuza BC, are loc egalitatea $\cos^2 B+\cos^2 C=1$.

Subiectul II

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} a+1 & 2 & 3 \\ 2 & a+3 & 1 \\ 3 & 1 & a+2 \end{pmatrix}$, unde $a\in\mathbb{R}$.

a) Să se demonstreze că determinantul matricei A are valoarea
$$(a+6)\left(a-\sqrt{3}\right)\left(a+\sqrt{3}\right).$$
b) Pentru $a=-2$ să se calculeze inversa matricei A.

2. Pe mulţimea numerelor reale se consideră legea de compoziţie
$$x\circ y=-10xy+10x+10y-9,\ \forall\, x,y\in\mathbb{R}.$$
a) Să se demonstreze că mulţimea $H=(-\infty,1)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea de compozoţie $"\circ"$.
b) Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x\circ x\circ x=x$.

Subiectul III

1. Se consideră funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

a) Să se determine intervalele de monotonie şi punctele de extrem ale funcţiei f.
b) Să se demonstreze că $5^{\sqrt{7}}<7^{\sqrt{5}}$.
c) Să se calculeze $\int_1^e x(f(x))^2dx$.

Subiectele au fost propuse şi selectate de:
Prof. Adela Terezia Pop, C.T. "Aurel Vlaicu"
Prof. Adrian Ioan Pop, C.N. "Gheorghe Şincai"

Argument 18

Premianţii

Clasa a IX-a

Excelenţă. *Zelina Paul* (C.N. "Vasile Lucaciu").

Premiul I. *David Cătălin* (C.N. "Gheorghe Şincai"), *Băban Diana* (C.N. "Gheorghe Şincai"), *Ianoş Raul* (C.N. "Gheorghe Şincai"), *Zigler Alexandru* (C.N. "Gheorghe Şincai").

Premiul al II-lea. *Filip Rareş* (C.N. "Gheorghe Şincai"), *Ionuţi Bogdan* (C.N. "Gheorghe Şincai"), *Tămâian Rareş* (C.N. "Gheorghe Şincai"), *Bordeanu Lucia* (C.N. "Gheorghe Şincai"), *Conţiu Alexandru* (C.N. "Gheorghe Şincai"), *Muthi Sonia* (C.N. "Gheorghe Şincai"), *Petruţ Andreea* (C.N. "Gheorghe Şincai").

Premiul al III-lea. *Şişeştean Radu* (C.N. "Gheorghe Şincai"), *Soporan Tudor* (C.N. "Vasile Lucaciu"), *Varady Iulia* (C.N. "Gheorghe Şincai"), *Diaconescu Mălina* (C.N. "Vasile Lucaciu"), *Dârle Ancuţa* (C.N. "Gheorghe Şincai"), *Buzilă Andra* (C.N. "Gheorghe Şincai"), *Şuteu Ionuţ* (C.N. "Gheorghe Şincai"), *Vale Bogdan* (C.N. "Gheorghe Şincai").

Clasa a X-a

Excelenţă. *Lucaciu Sergiu* (C.N. "Gheorghe Şincai").

Premiul I. *Mărieş Maria* (C.N. "Gheorghe Şincai").

Premiul al II-lea. *Pop Vlad* (C.N. "Gheorghe Şincai"), *Hagău Iulian* (C.N. "Gheorghe Şincai").

Premiul al III-lea. *Tămâian Andrei* (C.N. "Gheorghe Şincai"), *Bojor Barbu* (C.N. "Gheorghe Şincai"), *Damşa Dinu* (C.N. "Gheorghe Şincai"), *Darolţi Larisa* (C.N. "Vasile Lucaciu").

Clasa a X-a

Excelenţă. *Sântejudean Tudor* (C.N. "Gheorghe Şincai"), *Zelina Mihai* (C.N. "Vasile Lucaciu").

Premiul I. *Chşcă Andrei* (C.N. "Gheorghe Şincai").

Premiul al II-lea. *Iosif Andrei* (C.N. "Gheorghe Şincai"), *Kando Edina* (C.N. "Gheorghe Şincai").

Premiul al III-lea. *Dunca Dan* (C.N. "Gheorghe Şincai"), *Griguţă Paula* (C.N. "Gheorghe Şincai"), *Goteciuc Gabriel* (C.N. "Vasile Lucaciu").

Clasa a XII-a M1

Premiul I. *Butnar Adrian* (C.N. "Gheorghe Şincai"), *Ţînţar Oana* (C.N. "Gheorghe Şincai").

Premiul al II-lea. *Pop Claudia* (C.N. ”Gheorghe Şincai”), *Chiş Selena* (C.N. ”Gheorghe Şincai”), *Zicher Blanka* (C.N. ”Gheorghe Şincai”), *Bele Bogdan* (C.N. ”Vasile Lucaciu”), *Dohi Rebeca* (C.N. ”Gheorghe Şincai”), *Pop Iasmina* (C.N. ”Gheorghe Şincai”).

Premiul al III-lea. *Voiţ Radu* (C.N. ”Gheorghe Şincai”), *Grad Mariana Roxana* (Liceul ”Bogdan Vodă”), *Bledea Bgdan* (L.T. ”Emil Racoviţă”), *Todoran Larisa* (C.N. ”Gheorghe Şincai”), *Bocuţ Oana* (C.N. ”Gheorghe Şincai”), *Costea Ioana* (C.N. ”Gheorghe Şincai”), *Onişa Iulia* (C.N. ”Gheorghe Şincai”), *Dragoş Alexandra* (C.N. ”Gheorghe Şincai”), *Kalisch Denisa* (C.N. ”Gheorghe Şincai”), *Robaş Iulia* (C.N. ”Gheorghe Şincai”), *Rad Ciprian* (C.N. ”Vasile Lucaciu”), *Sabadâş Oana* (C.N. ”Gheorghe Şincai”), *Iuga Andreea* (C.N. ”Vasile Lucaciu”), *Tohătan Cristian* (C.N. ”Gheorghe Şincai”), *Grigor Sonia* (C.N. ”Gheorghe Şincai”), *Libotean Florinel* (C.N. ”Gheorghe Şincai”), *Ungureanu Radu* (C.N. ”Gheorghe Şincai”), *Crainic Cătălin* (C.N. ”Gheorghe Şincai”), *Mayer George* (C.N. ”Gheorghe Şincai”).

Clasa a XII-a M2

Premiul I. *Herczeg Adrian* (C.E. ”Nicoale Titulescu”).

Premiul al II-lea. *Perţa Radu Trofin* (C.T. ”George Bariţiu”), *Gherghel Alexandru* (C.T. ”George Bariţiu”).

Premiul al III-lea. *Dicsi Raynold* (C.E. ”Nicoale Titulescu”), *Rob Oana* (C.N. ”Gheorghe Şincai”), *Ardelean Andrei* (L.T. ”Emil Racoviťă”).

Tabăra Judeţeană de Excelenţă în Matematică
Borşa, Maramureş
1 – 7 septembrie 2016

În perioada 1 - 7 septembrie 2016, s-a desfăşurat la Borşa, Tabăra Judeţeană de Excelenţă la matematică.

La această tabără au participat elevi de gimnaziu şi de liceu, care s-au clasat pe primele locuri la Olimpiada judeţeană de matematică.

Clasa a V-a: *Costin Oana, Tuş Traian, Rus Tudor* (C.N. "Gheorghe Şincai"), *Hanţig Lorena Maria* (Şc.gim. nr. 7 Borşa), *Muntean Tudor* (C.N. "Vasile Lucaciu").

Clasa a VI-a: *Lazea Darius, Iliuţă Filip* (C.N. "Gheorghe Şincai"), *Muntean Tudor* (C.N. "Vasile Lucaciu"), *Mujdar Milan, Hosu Iulia* (C.N. "Dragoş Vodă"), *Brăgaru Maria* (Liceul de Arte).

Clasa a VII-a: *Ciceu Denis, Talpoş Carina, Zaharie Oana* (C.N. "Vasile Lucaciu"), *Pop Paul Marius* (Şc.gim. Vişeu de Jos), *Mariş Cătălin* (Liceul Borşa).

Clasa a VIII-a: *Becsi Paul, Andreicuţ Teofil, Boroica Adrian* (C.N. "Gheorghe Şincai"), *Robu Vlad* (Şc.Gim. "Nicolae Iorga"), *Moldovan Nicolae* (Şc.Gim. "George Coşbuc").

Clasa a IX-a: *Matei Bledea Alexandru* (C.N. "Gheorghe Şincai"), *Stepan Dacian Marian* (C.N. "Dragoş Vodă"), *Diaconescu Mălina* (C.N. "Vasile Lucaciu").

Clasa a X-a: *Pop Vlad, Mărieş Maria, Bojor Barbu, Lucaciu Sergiu* (C.N. "Gheorghe Şincai").

Clasa a XI-a: *Sântejudean Tudor* (C.N. "Gheorghe Şincai").

Profesorii care au însoţit grupul şi au ţinut lecţii în această tabără au fost: Andrei Bretan (C.N. "Vasile Lucaciu") - directorul taberei, Florin Bojor, Gheorghe Boroica, Nicolae Muşuroia (C.N. "Gheorghe Şincai"), Vasile Ienuţaş, Ştefan Zah (Şc.gim. "Nicolae Iorga"), Gheorghe Gherasin (Liceul "Regele Ferdinand") şi conf.univ.dr. Vasile Pop de la U.T. Cluj-Napoca.

Prezentăm subiectele propuse la testul final.

Clasa a IX-a

1. Se consideră ecuaţia $x^2 - 6x + 1 = 0$ cu soluţiile x_1, x_2 şi $S_n = x_1^n + x_2^n$, $n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că $S_n \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ şi că $(S_n, 5) = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

2. *a*) Să se determine un punct P pe latura (BC) a triunghiului ABC astfel încât $|\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}|$ să fie minim.

b) Fie B' şi C' picioarele bisectoarelor din B, respectiv C, în triunghiul ABC, iar G centrul său de greutate. Dacă B', G, C' sunt coliniare, să se arate că $bc = ab + ac$, unde a, b, c sunt lungimile laturilor triunghiului.
(Se cere soluţie vectorială)

3. a) Determinaţi $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^*$ astfel încât $|x_1| + |x_2| - |x_1 + x_2| = 2$.
b) Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{Z}^*$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, cu proprietatea

$$|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| - |x_1 + x_2 + \cdots + x_n| = 2.$$

Să se arate că există $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ astfel încât $|x_i| = 1$.

Problemele au fost selectate şi propuse de:
Prof. Nicolae Muşuroia, C.N. "Gheorghe Şincai"

Clasa a X-a

1. a) Să se demonstreze că

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b)(b+c)(c+a),\ \forall\, a, b, c \in \mathbb{R}.$$

b) Să se rezolve ecuaţia $\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{3-5x} + \sqrt[3]{3x-1} = 1$.

2. Să se rezolve ecuaţia $625^x + 5^{\frac{1}{x}} + 2^{2x+\frac{1}{2x}} = 1254$.

3. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie cu proprietatea că $f(xf(x) + f(y)) = y + f^2(x)$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$.
a) Să se demonstreze că funcţia f este bijectivă.
b) Să se determine funcţiile care verifică proprietatea din enunţ.

Problemele au fost selectate şi propuse de:
Prof. Florin Bojor, C.N. "Gheorghe Şincai"

Clasa a XI-a

1. Rezolvaţi ecuaţia matriceală $X^3 - 2X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 10 & 4 \end{pmatrix}$, $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ şi apoi determinaţi X^n, $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale dat de $a_{n+1} = a_n(1 - a_n^2)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, unde $a_1 \in (0, 1)$. Să se arate că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent şi calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n} \cdot a_n\right)$.

3. a) Să se arate că, dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie periodică şi există $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = c \in \mathbb{R}$, atunci $f(x) = c$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.
b) Să se determine funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ştiind că $f(x+2) + f(x) = 2f(x+1)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$ şi că există $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - x) = a \in \mathbb{R}$.

Problemele au fost selectate şi propuse de:
Prof. Gheorghe Boroica, C.N. "Gheorghe Şincai"
Prof. Gheorghe Gherasin, Liceul "Regele Ferdinand"

Clasa a XII-a

1. Calculaţi:

a) $\int \frac{2x+9}{x(x+3)(x+6)(x+9)+a^2}dx$, unde $x>0$ şi $a \in \mathbb{R}$.

b) $\int \frac{3x-4}{e^{3x}-x+1}dx$, unde $x \geq 0$.

2. Fie $(G,\cdot)$ un grup cu proprietatea că există $z \in G$, astfel încât $x \cdot y = z$, $\forall\, x,y \in G\backslash\{e\}$, unde e este elementul neutru al grupului G. Arătaţi că grupul $(G,\cdot)$ este izomorf cu $(\mathbb{Z}_2,+)$.

3. Fie $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ o funcţie derivabilă şi F o primitivă a sa, astfel încât $F(x)=f^2(x)+f(x)$, $\forall\, x>0$.

a) Arătaţi că funcţia f este strict crescătoare pe $(0,\infty)$.

b) Arătaţi că funcţia $f-f'$ este strict crescătoare pe $(0,\infty)$.

Problemele au fost selectate şi propuse de:
Prof. Gheorghe Boroica, C.N. "Gheorghe Şincai"
Prof. Gheorghe Gherasin, Liceul "Regele Ferdinand"

Concursul interjudeţean de matematică "ARGUMENT" Baia Mare, 6–7 noiembrie 2015

În perioada 6–7 noiembrie 2015 s-a desfăşurat la Baia Mare cea de-a şaptea ediţie a Concursului interjudeţean de matematică "Argument". Organizatorii acestuia au fost membrii catedrei de matematică a Colegiului Naţional "Gheorghe Şincai" din localitate, în parteneriat cu Inspectoratul şcolar Judeţean Maramureş. Cu această ocazie a fost lansat cel de-al şaisprezecelea număr al revistei "Argument", editat de catedra de matematică a liceului gazdă.
Preşedintele concursului a fost şi de această dată domnul conferenţiar Vasile Pop, de la Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca. La concurs au participat loturile colegiilor naţionale: "Andrei Mureşanu" Dej, "Mihai Eminescu" Satu Mare, "Alexandru Papiu Ilarian" Tîrgu Mureş, "Silvania" Zalău, "Dragoş Vodă" Sighetu Marmaţiei, "Vasile Lucaciu" Baia Mare, "Gheorghe Şincai" Baia Mare, precum şi elevi de gimnaziu de la şcolile reprezentative din judeţ. Prezentăm în continuare enunţurile problemelor şi lista premianţilor. Subiectele de liceu au fost propuse de d-nul conferenţiar Vasile Pop.

La clasele de gimnaziu, subiectul a constat din opt probleme tip grilă şi două probleme cu rezolvări complete. Prezentăm numai problemele la care s-au cerut rezolvări complete.

Clasa a V-a

1. Fie a şi b două numere naturale. Împărţind numărul a la numărul b obţinem câtul 4 şi restul 50.

a. Arătaţi că numărul $2a - 8b + 25$ este cub perfect.

b. Determinaţi numărul perechilor (a, b), dacă în plus $a + 11b \leq 2015$.

2. *a*. Arătaţi că printre numerele $1, 2, 3, \ldots, 15, 16$ există exact un număr x astfel încât $16 + x$ să fie pătrat perfect.

b. Arătaţi că numerele $1, 2, 3, \ldots, 15, 16$ nu pot fi aranjate pe un cerc astfel încât suma oricăror două numere vecine să fie pătrat perfect.

c. Arătaţi că numerele $1, 2, 3, \ldots, 15, 16$ pot fi aranjate pe o dreaptă astfel încât suma oricăror două numere vecine să fie pătrat perfect.

Clasa a VI-a

1. O mulţime $A = \{1, 2, 3, 4, \ldots, 2n\}$, $n \in \mathbb{N}^*$, se numeşte cubică dacă ea poate fi scrisă ca reuniune de n submulţimi disjuncte două câte două, astfel încât suma elementelor fiecărei submulţimi să fie cub perfect.

a. Să se arate că mulţimea $A = \{1, 2, 3, 4, \ldots, 26\}$ este cubică.

b. Să se arate că mulţimea $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ nu este cubică.
c. Să se arate că mulţimea $C = \{1, 2, 3, 4, \ldots, 603, 604\}$ este cubică.

2. Pe o dreaptă se consideră punctele $O, A_1, A_2, \ldots, A_{2015}$, în această ordine, astfel încât $OA_1 = 1\,\mathrm{cm}$, $A_1A_2 = 3\,\mathrm{cm}$, $A_2A_3 = 3^2\,\mathrm{cm}$, $\ldots$, $A_{2014}A_{2015} = 3^{2014}\,\mathrm{cm}$.

a. Să se calculeze lungimea segmentului OA_{2015}.

b. Să se determine segmentul de lungime 9720 cm, având capetele în două din punctele considerate.

c. Să se arate că există cel puţin 1009 segmente având capetele printre punctele date şi care au lungimea exprimată printr-un pătrat perfect.

Clasa a VII-a

1. *a.* Să se arate că o sumă de numere naturale nenule consecutive, formată din cel puţin doi termeni, are cel puţin un divizor impar mai mare decât 1.

b. Demonstraţi că un număr natural se poate scrie ca o sumă de cel puţin două numere naturale nenule consecutive dacă şi numai dacă numărul nu este o putere a lui 2.

2. În rombul $ABCD$ bisectoarea $\measuredangle ADB$ intersectează dreapta AC în I, iar bisectoarea $\measuredangle ACD$ intersectează dreapta BD în J. Dacă $BI \perp AJ$, calculaţi măsura unghiului $\measuredangle BAD$ şi demonstraţi că $IJ \| AD$.

Clasa a VIII-a

1. *a.* Demonstraţi că $x + \dfrac{2}{x} \geq 2\sqrt{2}$, $\forall\, x > 0$.

b. Dacă $x \geq \sqrt{2}$ şi $y \geq \sqrt{2}$, arătaţi că $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} \leq \sqrt{2}$.

c. Determinaţi $x, y \in \mathbb{R}$ care îndeplinesc simultan egalităţile: $2x = y + \dfrac{2}{y}$ şi $2y = x + \dfrac{2}{x}$.

2. Tetraedrul $SABC$ are toate feţele laterale triunghiuri neisoscele, congruente între ele. Demonstraţi că baza are aceeaşi arie cu o faţă laterală.

Clasa a IX-a

1. O lăcustă face salturi, fiecare salt în linie dreaptă şi de două ori mai lung ca precedentul. Poate vreodată lăcusta să revină în punctul de plecare iniţial?

Mircea Rus

2. Să se determine numerele reale x cu proprietatea că trei dintre numerele

$$a = x + \sqrt{3},\ b = x + \frac{1}{x}\ ,\ c = x^2 + 4\sqrt{3},\ d = x - \frac{1}{x}$$

sunt numere întregi.

3. Fie a, b, c, d numere reale care verifică relaţiile:

$$ab + cd = 14,\ ac + bd = 11,\ ad + bc = 10,\ abcd = 24.$$

Să se determine cea mai mare valoare pe care o poate lua a.

4. Fie ABC un triunghi cu înălţimile AA', BB', CC'. Să se arate că, dacă $9\overrightarrow{AA'} + 13\overrightarrow{BB'} + 16\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{0}$, atunci unul dintre unghiurile triunghiului este de $60°$.

Clasa a X-a

1. Fie ABC un triunghi dreptunghic cu laturile $a > b > c$. Să se determine toate triunghiurile dreptunghice $A'B'C'$ cu laturile $a' > b' > c'$ astfel ca triunghiul cu laturile $a + a'$, $b + b'$, $c + c'$ să fie dreptunghic.

2. Fie x, y numere reale cu proprietatea:

$$x = y + \cfrac{1}{x + \cfrac{1}{y + \cfrac{1}{x + \cfrac{1}{\ddots}}}}\,, \quad y = x - \cfrac{1}{y + \cfrac{1}{x - \cfrac{1}{y + \cfrac{1}{\ddots}}}}$$

(în ambele expresii apar o infinitate de fracţii).
Să se arate că $x \cdot y = 1$.

3. *a*) Să se arate că, pentru orice număr natural impar n, nu există funcţii $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifică ecuaţia:

$$f(f(x + y) - f(x - y)) = x^n y^n,\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}. \qquad (1)$$

b) Există numere naturale nenule n pentru care ecuaţia (1) are soluţii?

4. Se consideră o progresie aritmetică de numere reale $(a_n)_{n\geq 1}$, cu proprietatea că a_1^2, a_2^2 şi a_{2015}^2 sunt termeni ai progresiei. Să se arate că toţi termenii progresiei sunt numere întregi.

Clasa a XI-a

1. Să se determine numărul secvenţelor $(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{16})$ de numere naturale având proprietăţile

$$x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{16}$$
$$x_{16} = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 4^4 \cdot 5^5$$

şi astfel încât $\dfrac{x_{k+1}}{x_k}$ să fie număr prim pentru orice $k = 0, 1, 2, \ldots, 15$.

2. Fie a un număr natural nenul şi funcţia

$$f_a : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*,\ f_a(n) = an + (a,n) + [a,n],\ \forall\, n \geq 1.$$

a) Să se arate că funcţia f_a este injectivă pentru orice $a \in \mathbb{N}^*$.
b) Să se arate că $f_a(n) \neq 100$ pentru orice $a \in \mathbb{N}^*$ şi orice $n \in \mathbb{N}^*$.
c) Să se determine valorile lui a pentru care există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel ca

$$f_a(n) = 99.$$

3. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Să se determine matricele $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}_+)$ cu proprietatea că $A \cdot A^T = I_n$.

4. *a*) Să se determine mulţimea $X_0 \subseteq \mathbb{R}$ pentru care putem defini şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ prin relaţia de recurenţă $x_{n+1} = \dfrac{1}{x_n + 1}$, pentru orice $n \geq 0$, unde $x_0 \in X_0$.

b) Să se studieze monotonia şi mărginirea şirului $(x_n)_{n\geq 0}$ definit la punctul *a*), în funcţie de $x_0 \in X_0$.

Clasa a XII-a

1. Să se determine funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care admit primitiva $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ şi verifică relaţia:

$$f(x-y) = \frac{F(x)}{F(y)},\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}.$$

2. Să se determine numărul matricelor $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_p)$ cu proprietatea $A^2 = I_2$, unde p este un număr prim.

3. Să se determine funcţiile continue $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$ care verifică relaţia:

$$(1+x^2)f(x^2) = f(x),\ \forall\, x \in (-1,1).$$

4. *a*) Fie A o mulţime cu cel puţin două elemente şi $* : A \times A \to A$ o lege de compoziţie asociativă şi comutativă.
Să se arate că, dacă ecuaţia $a * x = b$ are soluţie $x \in A$ pentru orice $a, b \in A$, atunci funcţia

$$f_c : A \to A,\ f_c(x) = c * x,\ x \in A$$

este injectivă pentru orice $c \in A$.

b) Fie $g : A \to A$ o funcţie bijectivă cu proprietatea că $g(x) \neq x$ pentru orice $x \in A$ şi legea de compoziţie

$$\text{"}\circ\text{"} : A \times A \to A,\ x \circ y = g(y)\ (x, y \in A).$$

Să se arate că legea "$\circ$" nu este asociativă şi nu este comutativă, că ecuaţia $a \circ x = b$ are soluţie $x \in A$ pentru orice $a, b \in A$ şi că pentru orice $c \in A$ funcţia

$$g_c : A \to A,\ g_c(x) = c \circ x,\ x \in A$$

este injectivă.

Premianţii concursului "Argument", ediţia a VII-a

Clasa a V-a

Premiul I. *Tuş Traian* (C.N. "Gheorghe Şincai" Baia Mare).

Premiul al II-lea. *Paşcu Dacian, Costin Oana* (C.N. "Gheorghe Şincai" Baia Mare), *Onea Iulian* (C.N. "Vasile Lucaciu" Baia Mare), *Popan Cosmin* (C.N. "Mihai Eminescu" Satu Mare).

Premiul al III-lea. *Biriş Marc*, *Rus Teodor*, *Sava Rareş* (C.N. "Gheorghe Şincai" Baia Mare).

Clasa a VI-a

Premiul I. *Zlampareţ George* (C.N. "Gheorghe Şincai" Baia Mare).

Premiul al II-lea. *Dragoş Andreea* (C.N. "Vasile Lucaciu" Baia Mare), *Mujdar Milan* (C.N. "Dragoş Vodă" Sighetu Marmaţiei), *Lazea Darius* (C.N. "Gheorghe Şincai" Baia Mare).

Premiul al III-lea. *Iliuţă Filip* (C.N. "Gheorghe Şincai" Baia Mare), *Ştirbu Silvia* (C.N. "Vasile Lucaciu" Baia Mare)

Clasa a VII-a

Premiul I. *Ciceu Denis* (C.N. "Gheorghe Şincai" Baia Mare).

Premiul al II-lea. *Zaharie Oana*, *Talpoş Carina* (C.N. "Vasile Lucaciu" Baia Mare).

Premiul al III-lea. *Giuroiu Tudor* (C.N. "Gheorghe Şincai" Baia Mare), *Angheluş Alin* (C.N. "Mihai Eminescu" Satu Mare), *Lazăr Laurenţiu*, *Treista Georgiana* (C.N. "Dragos Vodă" Sighetu Marmaţiei).

Clasa a VIII-a

Premiul I. *Boroica Adrian* (C.N. "Gheorghe Şincai" Baia Mare), *Robu Vlad*, *Pop Călin* (Şc. Gim. "Nicoale Iorga" Baia Mare).

Premiul al II-lea. *Ilieş Iulia* (C.N. "Gheorghe Şincai" Baia Mare), *Micu Adrian Tudor* (C.N. "Mihai Eminescu" Satu Mare).

Premiul al III-lea. *Becsi Paul* (C.N. "Gheorghe Şincai" Baia Mare).

Clasa a IX-a

Premiul I. *Matei Bledea Alexandru* (C.N. "Gheorghe Şincai" Baia Mare).

Premiul al II-lea. *Cotârlan Codrin* (C.N. "Dragoş Vodă" Sighetu Marmaţiei), *Mureşan Alexandru* (C.N. "Gheorghe Şincai" Baia Mare).

Premiul al III-lea. *Măcean Marius* (C.N. "Alexandru Papiu Ilarian" Tîrgu Mureş), *Mercea Ioana* (C.N. "Gheorghe Şincai" Baia Mare), *Papa Cristian Iulian* (C.N. "Andrei Mureşanu" Dej).

Clasa a X-a

Premiul I. *Blaga Bogdan* (C.N. "Alexandru Papiu Ilarian" Tîrgu Mureş).

Premiul al II-lea. *Neţa Răzvan*, *Pop Vlad* (C.N. "Gheorghe Şincai" Baia Mare).

Premiul al III-lea. *Puşcaşu Iulia Dana* (C.N. "Andrei Mureşanu" Dej), *Mărieş Maria* (C.N. "Gheorghe Şincai" Baia Mare), *Mocan Paula* (C.N. "Silvania" Zalău).

Clasa a XI-a

Premiul I. *Zelina Mihai* (C.N. "Vasile Lucaciu" Baia Mare).

Premiul al II-lea. *Buna-Mărginean Alex* (C.N. "Alexandru Papiu Ilarian" Tîrgu Mureş).

Premiul al III-lea. *Oprea Maria* (C.N. "Alexandru Papiu Ilarian" Tîrgu Mureş).

Clasa a XII-a

Premiul I. *Pop Darius* (C.N. "Dragoş Vodă" Sighetu Marmaţiei), *Sabău Vlad* (C.N. "Alexandru Papiu Ilarian" Tîrgu Mureş).

Premiul al II-lea. *Butnar Adrian* (C.N. "Gheorghe Şincai" Baia Mare).

Premiul al III-lea. *Cotan Paul* (C.N. "Gheorghe Şincai" Baia Mare).

Marele premiu "Dumitru Angheluţă", pentru cel mai mare punctaj obţinut în concurs dintre elevii de liceu, instituit în memoria marelui profesor de matematică al Colegiului Naţional "Gheorghe Şincai" Baia Mare, a fost câştigat de elevul *Blaga Bogdan* - prof. Carmen Pop, de la C.N. "Alexandru Papiu Ilarian" Tîrgu Mureş.

Concursul "Gheorghe Şincai" pentru micii matematicieni 14 aprilie 2016

1. Considerăm numerele a, b şi c, unde:

$$a = 3 + 870 \times 7 - 609 : 7 \times 69,$$

numărul b verifică relaţia

$$[215 - (32 \times 5 + 682 - b) : 9 - 135 : 9] : 5 = 23,$$

iar c este cel mai mic număr de 3 cifre cu produsul cifrelor egal cu 405.

a) Aflaţi numerele a, b, c.

b) Demonstraţi că $c + 1 = 40 \times (a - b + 2)$.

2. Ana, Dan şi Călin au cules un coş cu cireşe. Ana a cules cu două cireşe mai mult decât triplul cireşelor culese de Dan, iar Călin un sfert din cât ar fi cules Dan, dacă n-ar fi ajuns la ultimele trei cireşe.

a) Arătaţi că Ana a cules un număr impar de cireşe.

b) Dacă Ana a cules cu 88 de cireşe mai multe decât Dan, aflaţi câte cireşe a cules fiecare.

3. Se dă şirul: $1, 3, 7, 9, 8, 6, 4, 2, 11, 13, 17, 19, 18, 16, 14, 12, 21, \ldots$

a) Calculaţi suma primilor 20 de termeni ai şirului.

b) Pe ce loc este numărul 2016 în acest şir?

c) Scrieţi cel mai mare număr par din şir care are 10 cifre, iar suma cifrelor sale este egală cu 55.

Subiectul a fost propus de: Prof. Dana Heuberger

Premianţii I:

Jitariu Cosmina Maria (Şc. gim. "George Coşbuc, înv. Camelia Minghiraş)
Tamâian Lidia (Şc. gim. "George Coşbuc, înv. Racolţa Mariana)
Ştirbu Andrei Şc. gim. "George Coşbuc, înv. Camelia Minghiraş)

Olimpiada de matematică
etapa locală - 28 februarie 2016

Clasa a IX-a

1. a. Demonstraţi că $x^2 \geq \frac{2}{3}x - \frac{1}{9}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

b. Dacă $a, b, c > 0$ şi $a + b + c = 1$, demonstraţi că

$$\frac{a}{a^2+1} + \frac{b}{b^2+1} + \frac{c}{c^2+1} \leq \frac{9}{10}.$$

2. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia

$$\{x\}^2 + 22\{x\} = 10x - 9.$$

G.M. 12/2015

3. Pe laturile BC, CA şi AB ale triunghiului ABC se consideră punctele M, N, şi P. Fie A', B' şi C' simetricele punctelor A, B, respectiv C, faţă de punctele M, N şi P. Arătaţi că punctele $C \in (A'B')$, $A \in (B'C')$ şi $B \in (A'C')$ dacă şi numai dacă $\frac{BM}{MC} = \frac{CN}{NA} = \frac{AP}{PB} = 1$.

Subiectele au fost propuse şi selectate de:
Prof. Gherasin Gheorghe, Liceul "Regele Ferdinand", Sighetu Marmaţiei
Prof. Giurgi Vasile, C.N. "Dragoş Vodă", Sighetu Marmaţiei
Prof. Bojor Florin, C.N. "Gheorghe Şincai", Baia Mare

Clasa a X-a

1. Se consideră funcţia injectivă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifică relaţia

$$f(x) \cdot f(1-x) = f(ax + 2016),\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ \text{unde } a \in \mathbb{R}.$$

Demonstraţi că:
a) $a = 0$
b) $f(-2015) = 1$
c) f nu este surjectivă

2. *a*) Să se arate că $x - 2 + \frac{4}{\sqrt[4]{x-2}} \geq 5$, $\forall\, x \in (2, \infty)$

b) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $10 + \log_3\left(\frac{x}{x^3+54}\right) = x + \frac{4}{\sqrt[4]{x-2}}$.

3. Fie S aria triunghiului ABC şi a, b, c lungimile laturilor sale.

a) Folosind, eventual, faptul că funcţia $f : \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$ este convexă, să se arate că

$$\frac{1}{\cos\frac{A}{2}} + \frac{1}{\cos\frac{B}{2}} + \frac{1}{\cos\frac{C}{2}} \geq 2\sqrt{3}\,.$$

b) Să se demonstreze că

$$bc \cdot \sin\frac{A}{2} + ca\sin\frac{B}{2} + ab\sin\frac{C}{2} \geq 2\sqrt{3} \cdot S.$$

(*Prelucrare, Problema* 27173, *G.M.* 1/2016)

Subiectele au fost propuse şi selectate de:
Prof. Boroica Gabriela, C.N "Vasile Lucaciu" Baia Mare
Prof. Fărcaş Natalia, C.N. "Vasile Lucaciu" Baia Mare
Prof. Muşuroia Nicolae, C.N. "Gheorghe Şincai" Baia Mare
Prof. Pop Radu, Semin. Teol. Liceal "Sf. Iosif Mărturisitorul", Baia Mare

Clasa a XI-a

1. Se consideră determinantul

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ n & 1 & 2 & \dots & n-3 & n-2 & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \dots & n-4 & n-3 & n-2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n & 1 \end{vmatrix},\ n \in \mathbb{N}^*.$$

a) Calculaţi D_4 şi D_5;
b) Demonstraţi că există o infinitate de valori $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care $D_n < 0$.

2. Fie şirul $(x_n)_{n\geq 1}$, definit prin $x_1 = 1$, $x_2 = 3$ şi

$$x_{n+2} = 2x_{n+1} + \sqrt{x_{n+1}^2 - 3x_{n+1} \cdot x_n + 2 \cdot x_n^2}\,,\ n \in \mathbb{N}^*.$$

a) Demonstraţi că funcţia $f : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\sqrt{(x-1)(2x-1)}}{x}$ este crescătoare;

b) Arătaţi că şirul $(y_n)_{n\geq 1}$, $y_n = \dfrac{x_{n+1}}{2x_n}$ este convergent.

c) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{n^{2016}}$.

Dana Heuberger

3. Fie şirul $(x_n)_{n\geq 1}$, definit prin $x_1 \in (1,2)$ şi $2x_{n+1} + x_n^2 = 2(x_n + 1)$, $n \in \mathbb{N}^*$.
a) Demonstraţi că $x_n \in (1,2)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$;
b) Considerând şirul convergent, calculaţi limita sa;
c) Demonstraţi că şirul este convergent.

G.M. 1/2016 − 27175 (*modificată*)

Subiectele au fost propuse şi selectate de:
Prof. Dana Heuberger, C.N. "Gheorghe Şincai" Baia Mare
Prof. Gheorghe Sfara, C.N. "Vasile Lucaciu" Baia Mare
Prof. Cristian Heuberger, C.N. "Gheorghe Şincai" Baia Mare

Clasa a XII-a

1. Se consideră grupurile $\mathbb{C}^*, \cdot)$ şi $(G, \cdot)$, unde

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R},\ a^2 + b^2 \neq 0 \right\}$$

a) Să se arate că grupurile $(C^*, \cdot)$ şi $(G, \cdot)$ sunt izomorfe.

b) Arătaţi că, pentru fiecare n număr natural nenul, există un subgrup cu n elemente al grupului $(G, \cdot)$ şi să se determine acest subgrup.

2. Fie $a > 0$, $a \neq 1$. Calculaţi integrala $I = \displaystyle\int_0^1 a^{x^3+3x} \ln a^{x^5+4x^3+3x} dx$.

S.G.M. 12/2015

3. *a*) Să se determine primitivele funcţiei $f : (0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\arcsin x}{x^2}$.

b) Fie $i \subseteq \mathbb{R}$ un interval neredus la un singur punct şi $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie strict descrescătoare pe I şi care admite primitive pe I. Există funcţii $g : I \to I$ care admit primitive pe I astfel încât $g(g(x)) = f(x)$, $\forall\, x \in I$?

Subiectele au fost propuse şi selectate de:
Prof. Boroica Gheorghe, C.N. "Gheorghe Şincai" Baia Mare
Prof. Bob Robert, C.N. "Vasile Lucaciu" Baia Mare
Prof. Ocean Cristina, Liceul Teor. "Emil Racoviţă" Baia Mare

Test pentru admiterea în clasa a V-a
19 mai 2016

Matematică

1. Considerăm numerele a, b, c, unde $a = 798 + 4606 : 7 - 2016 : 9 \times 2$; b verifică:

$$6 \times (b - 9) = [81 : (8 \times 9 - 3 \times 21) + 11] : 4 + 8 : [5 + 3 \times (12 : 4 - 2)],$$

iar c este diferenţa dintre cel mai mare număr natural par de trei cifre diferite şi cel mai mic număr natural impar de trei cifre diferite.

a) Aflaţi numerele a, b, c.

b) Demonstraţi că $a : 9 = (c + 7) : b + 2 \times b + 3$.

c) Aflaţi câte numere cuprinse între c şi a dau restul 1 la împărţirea cu 5.

2. Adi, Lia şi Raul sunt trei fraţi care au citit în vacanţă mai multe cărţi. Adi a aranjat cărţile citite de el pe un raft gol. Mama a luat o carte din cele citite de Adi, iar Lia a citit jumătate din cărţile rămase pe raft, pe care le-a pus apoi pe masă. Tata a dăugat o carte la cele citite de Lia şi astfel pe masă sunt de şase ori mai multe cărţi decât cele citite de Raul.

a) Arătaţi că Adi a citit cel puţin 11 cărţi.

b) Dacă numărul tuturor cărţilor citite de Adi, Lia şi Raul este cuprins între 30 şi 40, aflaţi câte cărţi a citit fiecare.

3. Se dă şirul de coloane: $\begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 3 \\ \hline\end{array}$ $\begin{array}{|c|}\hline 2 \\ \hline 4 \\ \hline\end{array}$ $\begin{array}{|c|}\hline 5 \\ \hline 7 \\ \hline\end{array}$ $\begin{array}{|c|}\hline 6 \\ \hline 8 \\ \hline\end{array}$ $\begin{array}{|c|}\hline 9 \\ \hline 11 \\ \hline\end{array}$ $\begin{array}{|c|}\hline 10 \\ \hline 12 \\ \hline\end{array}$ $\ldots$

a) Calculaţi suma tuturor numerelor de pe primele 11 coloane.

b) Arătaţi că, oricum am alege 2 coloane alăturate, suma celor patru numere din aceste coloane este diferită de 2016.

c) Luca alege 40 de coloane şi şterge din ele toate numerele de sus. Apoi adună numerele rămase în coloanele alese. Dacă obţine numărul 1660, care este ultimul număr pe care l-a şters?

Subiectele au fost propuse şi selectate de:
Prof. Dana Heuberger, C.N. "Gheorghe Şincai" Baia Mare
Prof. Adrian Pop, C.N. "Gheorghe Şincai" Baia Mare

Rezolvarea problemelor din numărul anterior

Clasa a IX-a

1. *Fie* $n \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\}$, $x_k \in \mathbb{N}^*$, $k = \overline{1,n}$ *şi pentru orice* $m \in \mathbb{N}^*$, $m \leq n$ *notăm* $p(m) = \prod_{k=1}^{m}(x_k + x_{k+1})$, *unde* $x_{m+1} = x_1$. *Dacă* $n \geq 2017$, *să se arate că*

$$2015^{p(2015)} + 2017^{p(2017)} + 2014 \text{ se divide cu } 2016.$$

D.M. Bătineţu-Giurgiu

Soluţie. Mai întâi arătăm că, pentru orice m număr natural impar cu $m \leq n$, numărul $p(m)$ este par. Prin absurd, presupunem că $p(m)$ este număr impar care este produs de numere impare $x_k, x_{k+1}, k = \overline{1,m}$, $x_{m+1} = x_1$. Dar

$$s(m) = \sum_{k=1}^{m}(x_k + x_{k+1}) = 2\sum_{k=1}^{m} x_k = 2t,\ t \in \mathbb{N}^*,$$

adică suma unui număr impar de numere impare este un număr par, ceea ce este absurd. Deci $p(m)$ este număr par, adică $p(m) = 2u$, $u \in \mathbb{N}^*$.
Prin urmare $p(2015) = 2v$, $p(2017) = 2w$, $v, w \in \mathbb{N}^*$, atunci

$$\begin{aligned}
2015^{p(2015)} + 2017^{p(2017)} + 2014 &= (2015^2)^v - 1 + (2017^2)^w - 1 + 2016 \\
&= (2015^2 - 1)\left(\underbrace{2015^{2(v-1)} + 2015^{2(v-2)} + \cdots + 1}_{=a}\right) \\
&\quad + (2017^2 - 1)\left(\underbrace{2017^{2(w-1)} + 2017^{2(w-2)} + \cdots + 1}_{=b}\right) + 2016 \\
&= (2015-1)(2015+1)a + (2017-1)(2017+1)b + 2016 \\
&= 2016(2014a + 2018b + 1).
\end{aligned}$$

Cu aceasta enunţul este demonstrat.

2. *Dacă* $x, y, z \in \mathbb{R}_+^*$, $m \in \mathbb{R}_+$, *atunci*

$$\frac{x^{2m+2}}{(y+z)^{m+1}(2x+y+z)^{m+1}} + \frac{y^{2m+2}}{(z+x)^{m+1}(x+2y+z)^{m+1}} + \frac{z^{2m+2}}{(x+y)^{m+1}(x+y+2z)^{m+1}} \geq \frac{3}{2^{3m+3}}$$

D.M. Bătineţu-Giurgiu

Soluţie. Fie $X = x + y + z$. Atunci avem

$$W = \sum_{cyclyc} \frac{x^{2m+2}}{(y+z)^{m+1}(2x+y+z)^{m+1}} = \sum_{cyclic} \left(\frac{x^2}{(X-x)(X+x)}\right)^{m+1} \overset{Radon}{\geq}$$

$$\geq \frac{1}{3^{m+1}} \left(\sum_{cyclic} \frac{x^2}{X^2 - x^2}\right)^{m+1} = \frac{1}{3^m} V^{m+1}, \tag{1}$$

unde

$$\begin{aligned} V &= \sum_{cyclic} \left(\frac{x^2}{X^2 - x^2}\right) \Leftrightarrow V + 3 = \sum_{cyclic} \left(\frac{x^2}{X^2 - x^2} + 1\right) \\ &= \sum_{cyclic} \left(\frac{X^2}{X^2 - x^2}\right) = X^2 \sum_{cyclic} \left(\frac{1}{X^2 - x^2}\right) \\ &\geq X^2 \frac{(1+1+1)^2}{3X^2 - (x^2 + y^2 + z^2)} \geq \frac{9X^2}{3X^2 - \dfrac{X^2}{3}} = \frac{27}{8}. \end{aligned}$$

De unde

$$V \geq \frac{27}{8} - 3 = \frac{3}{8}. \tag{2}$$

Din (1) şi (2) deducem că $\quad W \geq \dfrac{1}{3^m} \cdot \dfrac{3^{m+1}}{8^{m+1}} = \dfrac{3}{2^{3m+3}}$.

3. *Dacă t_a este lungimea tangentei comune la cercurile descrise pe laturile $[AB]$ şi $[AC]$ ca diametre, cuprinse între punctele de contact, t_b, t_c sunt analoagele lui t_a iar r este raza cercului înscris triunghiului ABC, atunci*

$$\frac{(t_a^4 + t_b^4)^2}{t_c^2} + \frac{(t_b^4 + t_c^4)}{t_a^2} + \frac{(t_c^4 + t_a^4)^2}{t_b^2} \geq 324r^6$$

D.M. Bătineţu-Giurgiu

Soluţie. Fie s semiperimetrul triunghiului şi F aria sa. Atunci $t_a = T_bT_c$, $O_cT_b = \dfrac{c}{2}$, $O_bT_c = \dfrac{b}{2}$, $O_bO_c = \dfrac{a}{2}$, iar din triunghiul dreptunghic O_bMO_c obţinem

$$\begin{aligned} T_bT_c^2 = O_cM^2 = O_bO_c^2 - O_bM^2 &= \frac{a^2}{4} - \frac{(b-c)^2}{4} = \frac{(a-b+c)(a+b-c)}{4} \\ &= (s-b)(s-c) = \frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{s(s-a)} = \frac{F^2}{s(s-a)} \end{aligned}$$

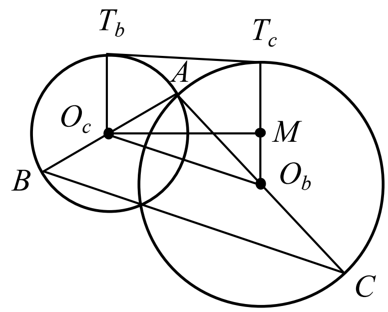
şi analog $t_b^2 = \dfrac{F^2}{s(s-b)}$, $t_c^2 = \dfrac{F^2}{s(s-c)}$. Însă avem

$$t_a^2 + t_b^2 + t_c^2 = \frac{F^2}{s}\left(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-b} + \frac{1}{s-c}\right) \geq \frac{9F^2}{s^2} = 9\left(\frac{F}{s}\right)^2 = 9r^2.$$

Dar atunci

$$\sum_{cyclic} \frac{(t_a^4+t_b^4)}{t_c^2} \overset{Bergstrom}{\geq} \frac{4(t_a^4+t_b^4+t_c^4)^2}{t_a^2+t_b^2+t_c^2} \overset{Bergstrom}{\geq}$$

$$\geq \frac{4(t_a^2+t_b^2+t_c^2)^4}{9(t_a^2+t_b^2+t_c^2)} = \frac{4}{9}(t_a^2+t_b^2+t_c^2)^3 \geq \frac{4}{9}\left(9r^2\right)^3 = 324r^6.$$



4. *Fie $\triangle ABC$ şi punctele $M \in (AB)$, $N \in (AC)$, iar $BN \cap AC = \{0\}$. Dacă $A_{\triangle AMN} = 2A_{\triangle OMN}$, să se demonstreze că O se găseşte pe linia mijlocie a $\triangle ABC$ paralelă cu BC.*

Florin Bojor

Soluţie. $\dfrac{A_{\triangle AMN}}{A_{\triangle ABC}} = \dfrac{AM \cdot AN}{AB \cdot AC}$, $\dfrac{A_{\triangle MON}}{A_{\triangle BOC}} = \dfrac{MO \cdot NO}{BO \cdot CO}$.
Aplicând teorema lui Menelaus în triunghiurile: ABN cu transversala $N-O-B$, avem $\dfrac{AN}{NC} \cdot \dfrac{CO}{OM} \cdot \dfrac{MB}{AB} = 1 \Rightarrow \dfrac{OM}{OC} = \dfrac{AN}{NC} \cdot \dfrac{MB}{AB}$, respectiv în $\triangle NAB$ cu transversala $M-O-C$, avem $\dfrac{AM}{MB} \cdot \dfrac{BO}{ON} \cdot \dfrac{NC}{CA} = 1 \Rightarrow \dfrac{ON}{OB} = \dfrac{AM}{MB} \cdot \dfrac{NC}{AC}$.
Atunci

$$\frac{A_{\triangle MON}}{A_{\triangle BOC}} = \frac{AN}{NC} \cdot \frac{MB}{AB} \cdot \frac{AM}{MB} \cdot \frac{NC}{AC} = \frac{AM \cdot AN}{AB \cdot AC} = \frac{A_{\triangle AMN}}{A_{\triangle ABC}}$$

şi, folosind ipoteza, rezultă că $A_{\triangle ABC} = 2 \cdot A_{\triangle BOC}$. Dacă notăm $AO \cap BC = \{P\}$, vom avea că $\dfrac{A_{\triangle ABC}}{A_{\triangle BOC}} = \dfrac{AP}{OP} \Rightarrow AP = 2OP \Rightarrow$ punctul O se găseşte pe linia mijlocie a $\triangle ABC$ paralelă cu BC.

5. *Fie p un număr natural nenul fixat. Să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, există numerele naturale distincte $a_1, a_2, \ldots, a_n$ divizibile cu $p+1$, astfel încât*

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}.$$

Gheorghe Boroica

Soluţie. Demonstrăm afirmaţia prin inducţie matematică. Propoziţia $P(2)$ este adevărată căci $\frac{1}{p} = \frac{1}{p+1} + \frac{1}{(p+1)p}$, deci $a_1 = p+1$, $a_2 = (p+1)p$.
Presupunem că $P(k)$ este adevărată ($k \in \mathbb{N}, k \geq 2$), deci

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_k},$$

unde $a_i \,\vdots\, p+1$, $i = \overline{1,k}$ şi $a_1, a_2, \ldots, a_k$ distincte. Atunci

$$\frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{a_1(p+1)} + \frac{1}{a_2(p+1)} + \cdots + \frac{1}{a_k(p+1)},$$

deci

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p+1} + \frac{1}{a_1(p+1)} + \frac{1}{a_2(p+1)} + \cdots + \frac{1}{a_k(p+1)}.$$

Rezultă că afirmaţia este adevărată şi pentru $k+1$ numere, deci are loc concluzia.

6. *Să se determine toate mulţimile de numere naturale, A, finite, cu proprietatea că $\forall\, x, y \in A \Rightarrow x \cdot y - 2015x \in A$.*

Gheorghe Boroica

Soluţie. Fie A ca şi în enunţ şi $M = \max A$.
Pentru $x = y = M$ obţinem că

$$M^2 - 2015M \in A \Rightarrow M^2 - 2015M \leq M \overset{ip}{\Rightarrow} M \in \{0, 1, \ldots, 2016\}$$

şi cum $A \subset \mathbb{N}$, deducem că

$$A \subset \{0, 1, 2, \ldots, 2016\}. \qquad (1)$$

Cazul I. $0 \in A$. Atunci $x \cdot 0 - 2015 \cdot x = -2015 \cdot x \in A$, $\forall\, x \in A$, deci $A = \{0\}$.

Cazul al II-lea. $0 \notin A$. Din ipoteză $\Rightarrow x(y - 2015) \in A$ şi cum $x \geq 1$, obţinem că $y \geq 2015$, deci $A \subset \{2015, 2016\}$.
$A = \{2015\}$ nu convine; $A = \{2016\}$ e soluţie; $A = \{2015, 2016\}$ nu convine.
Soluţiile sunt $A = \{0\}$ şi $A = \{2016\}$.

7. *Punctele $A, B, C, M, N, P, Q \in \mathcal{C}(0, r)$ astfel încât $O \notin Int\,\triangle ABC$; $\overset{\frown}{AM} \equiv \overset{\frown}{MC}$; $\overset{\frown}{AN} \equiv \overset{\frown}{NC}$; $M \in (\overset{\frown}{AB})$; $N \in \overset{\frown}{AC}$; $\overset{\frown}{AB} \equiv \overset{\frown}{BP}$; $B \in (\overset{\frown}{AP})$; $\overset{\frown}{AC} \equiv \overset{\frown}{CQ}$; $C \in (\overset{\frown}{AQ})$. Notăm $CN \cap AP = \{X\}$ şi $BM \cap AQ = \{Y\}$. Dacă $XY \| BC$ şi $AB \neq AC$, determinaţi $M(\sphericalangle BQC)$ şi $m(\sphericalangle NPM)$.*

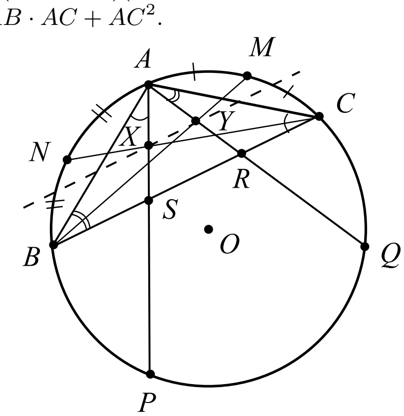
Petru Braica

Soluţie. Din $\overset{\frown}{AB} \equiv \overset{\frown}{BP} \Rightarrow \sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle BAP$, din $\overset{\frown}{AC} \equiv \overset{\frown}{CQ} \Rightarrow \sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle CAQ$.
Din $\overset{\frown}{AN} \equiv \overset{\frown}{NB} \Rightarrow \sphericalangle ACN \equiv \sphericalangle BCN \Rightarrow (CN$ bisectoare.
Notăm $AP \cap BC = \{S\}$ şi $AQ \cap BC = \{R\}$. Este cunoscut că $AS = AR$. Deoarece

$\triangle ASB \sim \triangle CAB$, avem $\dfrac{BS}{AB} = \dfrac{AB}{BC} \Rightarrow BS = \dfrac{AR^2}{BC}$ şi analog $\triangle ARC \sim \triangle BAC$, $\dfrac{CR}{AC} = \dfrac{AC}{BC} \Rightarrow CR^2 = \dfrac{AC^2}{BC}$. Cum $(BY$ este bisectoare în $\triangle ABR$,

$$\frac{AY}{YR} = \frac{AB}{BR} = \frac{AB}{BC - CR} = \frac{AB}{BC - \dfrac{AC^2}{BC}} = \frac{AB \cdot BC}{BC^2 - AC^2}$$

şi analog $\dfrac{AX}{XS} = \dfrac{AC \cdot BC}{BC^2 - AB^2}$. Din $XY \| BC = SR \Rightarrow \dfrac{AX}{XS} = \dfrac{AY}{YR} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \dfrac{AB \cdot BC}{BC^2 - AC^2} = \dfrac{AC \cdot BC}{BC^2 - AB^2} \Leftrightarrow AB(BC^2 - AB^2) = AC(BC^2 - AC^2) \Leftrightarrow BC^2(AB - AC) = AB^3 - AC^3 \Leftrightarrow (AB - AC)(BC^2 - AB^2 + AB \cdot BC - AC^2) = 0$; din $AB \neq AC$ avem $BC^2 = AB^2 - AB \cdot AC + AC^2$.



Aplicând teorema cosinusului în triunghiul BAC,

$$\cos(\sphericalangle BAC) = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{-AB \cdot AC}{2AB \cdot AC} = -\frac{1}{2},$$

deci $m(\sphericalangle BAC) = 120^\circ$, $m(\sphericalangle BQC) = \dfrac{m(\widehat{BAC})}{2} = \dfrac{120^\circ}{2} = 60^\circ$,

$$m(\sphericalangle NPM) = \frac{1}{2} m(\widehat{NM}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(m(\widehat{BAC})) = 30^\circ.$$

8. *Fie a, b, c lungimile laturilor unui triunghi de arie S. Arătaţi că*

$$\sqrt{a^4 - a^2b^2 + b^2} + \sqrt{b^4 - b^2c^2 + c^4} + \sqrt{c^4 - c^2a^2 + a^4} \leq$$
$$\leq \sqrt{\frac{9}{2}(a^4 + b^4 + c^4) - 24S^2}.$$

Gotha Günter

Soluţie. Notăm cu x partea stângă a inegalităţii din enunţ. Atunci din inegalitatea CBS avem

$$\begin{aligned} x &\le \sqrt{1^2+1^2+1^2}\cdot\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4+b^4-b^2c^2+c^4+c^4-c^2a^2+a^4} \\ &= \sqrt{3}\cdot\sqrt{2a^4+2b^4+2c^4-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2} \\ &= \sqrt{\frac{9}{2}\left(a^4+b^4+c^4\right)-\frac{3}{2}\left(2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4\right)} \\ &= \sqrt{\frac{9}{2}\left(a^4+b^4+c^4\right)-\frac{3}{2}\cdot 16S^2} = \sqrt{\frac{9}{2}\left(a^4+b^4+c^4\right)-24S^2}\,, \quad q.e.d. \end{aligned}$$

Observaţie. Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $a=b=c$.

9. *Fie triunghiul ABC cu $\frac{\pi}{2}>A>B>C$ şi punctele $D\in(BC\backslash[BC]$, $E\in(CA\backslash[CA]$ şi $F\in(BA\backslash[BA]$, astfel încât $\mu(\widehat{ABE})=\pi-2B$, $\mu(\widehat{ACF})=c$ şi $\mu(\widehat{FAD})=A$. Să se arate că punctele D,E,F sunt necoliniare.*

Dana Heuberger

Soluţie. Punctele D,E şi F sunt coliniare dacă şi numai dacă

$$\frac{EA}{EC}\cdot\frac{DC}{DB}\cdot\frac{FB}{FA}=1. \tag{1}$$

Din teorema sinusurilor în $\triangle EAB$, obţinem $\dfrac{EA}{\sin(\pi-2B)}=\dfrac{c}{\sin(B-C)}$, deci

$$EA=\frac{c\cdot\sin 2B}{\sin(B-C)}.$$

Din teorema sinusurilor în $\triangle EBC$, obţinem $\dfrac{EC}{\sin(\pi-B)}=\dfrac{a}{\sin(B-C)}$, deci

$$EC=\frac{a\cdot\sin B}{\sin(B-C)}\,.$$

Rezultă $\dfrac{EA}{EC}=\dfrac{c}{a}\cdot 2\cos B$.

Din teorema sinusurilor în $\triangle ACD$,
$\dfrac{DC}{\sin(\pi - 2A)} = \dfrac{b}{\sin(A-B)}$, deci

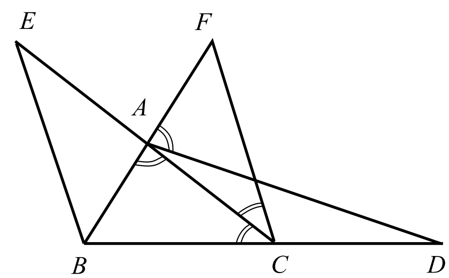
$$DC = \frac{b \sin 2A}{\sin(A-B)}.$$

Din teorema sinusurilor în $\triangle ABD$,

$$\frac{DB}{\sin(\pi - A)} = \frac{c}{\sin(A-B)},$$

deci $DB = \dfrac{c \sin A}{\sin(A-B)}$.

Rezultă $\dfrac{DC}{DB} = \dfrac{b}{c} \cdot 2\cos A$.



Analog, aplicând teorema sinusurilor în $\triangle BFC$ şi $\triangle AFC$, deducem că $\dfrac{FB}{FA} = \dfrac{a}{b} \cdot 2\cos C$. Obţinem că (1) $\Leftrightarrow$ $8\cos A \cos B \cos C = 1$, egalitate care are loc dacă şi numai dacă triunghiul ABC este echilateral, fals. Aşadar punctele D, E şi F sunt necoliniare.

10. *Să se arate că în orice triunghi ascuţitunghic ABC avem:*

$$R(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C) \leq 2r\left(\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2}\right).$$

Ludovic Longaver

Soluţie. Conform teoremei lui Feuerbach, dintre toate triunghiurile înscrise în triunghiul ABC, triunghiul ortic are perimetrul minim. Astfel, dacă luăm triunghiul format de proiecţiile centrului cercului înscris pe laturi, acesta va avea perimetrul mai mare decât perimetrul triunghiului ortic. Laturile triunghiului ortic sunt: $R \cdot \sin 2A$, $R \cdot \sin 2B$, $R \cdot \sin 2C$, ale triunghiului celălalt $2r \cdot \cos\dfrac{A}{2}$, $2r \cdot \cos\dfrac{B}{2}$, $2r \cdot \cos\dfrac{C}{2}$. De aici concluzia problemei.

11. *Să se demonstreze că, dacă într-un triunghi nedreptunghic ABC există relaţia*

$$\operatorname{tg}^4 A + \operatorname{tg}^4 B + \operatorname{tg}^4 C = (\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C)^2,$$

atunci triunghiul ABC este echilateral.

Ludovic Longaver

Soluţie. Introducem notaţiile: $x = \operatorname{tg} A$, $y = \operatorname{tg} B$, $z = \operatorname{tg} C$. Se cunoaşte că într-un triunghi nedreptunghic există relaţia $\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C$, ceea ce cu notaţiile noastre devine $x + y + z = x \cdot y \cdot z$

$$\begin{aligned} x^4 + y^4 + z^4 &\geq x^2 \cdot y^2 + x^2 \cdot y^2 + x^2 \cdot y^2 = (xy)^2 + (yz)^2 + (xz)^2 \\ &\geq x^2yz + xy^2z + xyz^2 = xyz(x+y+z) = (x+y+z)^2. \end{aligned}$$

Egalitatea se obţine doar pentru $x = y = z$, adică $\operatorname{tg} A = \operatorname{tg} B = \operatorname{tg} C \Rightarrow A = B = C$.

12. *Punctul M se află pe cercul circumscris patrulaterului inscriptibil şi cu diagonalele perpendiculare $ABCD$. Dacă H_1, H_2, H_3, H_4 sunt ortocentrele triunghiurilor MAB, MBC, MCD respectiv MDA, atunci $H_1H_2H_3H_4$ este dreptunghi.*

Nicolae Muşuroia

Soluţie.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OH_1} &= \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\\
\overrightarrow{OH_2} &= \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\\
\overrightarrow{OH_3} &= \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\\
\overrightarrow{OH_4} &= \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA}.
\end{aligned}$$

Atunci

$$\overrightarrow{H_1H_2} = \overrightarrow{H_1O} + \overrightarrow{OH_2} = -\overrightarrow{OH_1} + \overrightarrow{OH_2} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AC} \tag{1}$$
$$\overrightarrow{H_4H_3} = \overrightarrow{H_4O} + \overrightarrow{OH_3} = -\overrightarrow{OH_4} + \overrightarrow{OH_2} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AC},$$

obţinem $\overrightarrow{H_1H_2} = \overrightarrow{H_4H_3}$, deci $H_1H_2H_3H_4$ este paralelogram.
Analog se demonstrează că $\overrightarrow{H_1H_4} = \overrightarrow{BD}$, rezultă că $H_1H_4 \| BD$, iar din (1) avem $H_1H_2 \| AC$, deci $H_1H_4 \perp H_1H_2$ deoarece $AC \perp BD$.
Deducem că $H_1H_2H_3H_4$ este dreptunghi.

13. *Dacă x, y, z sunt numere reale pozitive, astfel încât $x+y+z+t = n$, atunci are loc inegalitatea*

$$\sqrt{nx+yz+yt} + \sqrt{ny+xz+zt} + \sqrt{nz+tx+ty} + \sqrt{nt+xy+xz} \le \frac{5n}{2}.$$

Adrian Pop

Soluţie.

$$\begin{aligned}
nx+yz+yt &= (x+y+z+t)x+yz+yt = x^2+yx+zx+tx+yz+yt\\
&= x(x+y)+z(x+y)+t(x+y) = (x+y)(x+z+t) \Rightarrow\\
&\Rightarrow \sqrt{nx+yz+yt} = \sqrt{(x+y)(x+z+t)} \le \frac{2x+y+z+t}{2}.
\end{aligned}$$

Analog

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{ny+xz+zt}\le\dfrac{2y+x+z+t}{2}\\ \sqrt{nz+tx+ty}\le\dfrac{2z+x+y+t}{2}\\ \sqrt{nt+xy+xz}\le\dfrac{2t+x+y+z}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{nx+yz+yt}+\sqrt{ny+xz+zt}+\sqrt{nz+tx+ty}+\sqrt{nt+xy+xz}$$
$$\le\frac{5(x+y+z+t)}{2}=\frac{5n}{2}.$$

14. *Fie $a,b,c,d>0$ cu $abc^2+b^2cd+cda^2+d^2ab=4$. Arătaţi că*

$$a^4+b^4+c^4+d^4+4abcd\ge 8.$$

(În legătură cu problema VIII.410 din R.M.T. nr. 2/2015)

Mihai Vijdeluc

Soluţie. Egalitatea din enunţ se scrie:

$$bc(ac+bd)+ad(ac+bd)=4\Leftrightarrow(ac+bd)\cdot(ad+bc)=4. \qquad (*)$$

Scriem inegalitatea lui Turkevici:

$$a^4+b^4+c^4+d^4+2abcd\ge a^2b^2+a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2+c^2d^2\Rightarrow$$
$$\Rightarrow a^4+b^4+c^4+d^4+4abcd\ge a^2b^2+a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2+c^2d^2+2abcd$$
$$=(a^2b^2+c^2d^2)+a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2+2abcd$$
$$\ge 2abcd+a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2+2abcd$$
$$=(ac+bd)^2+(ad+bc)^2\ge 2\sqrt{(ac+bd)^2\cdot(ad+bc)^2}$$
$$=2(ac+bd)\cdot(ad+bc)=2\cdot 4=8.$$

Am folosit inegalitatea mediilor şi $(*)$. Deci $a^4+b^4+c^4+d^4+4abcd\ge 8$.

15. *Să se determine cel mai mic număr natural n pentru care*

$$0,7<\left\{\sqrt[3]{n}\right\}<0,(7).$$

Mihai Vijdeluc

Soluţie. avem $\sqrt[3]{n}=\lfloor\sqrt[3]{n}\rfloor+\{\sqrt[3]{n}\}=a+b,\ \ a=\lfloor\sqrt[3]{n}\rfloor,\ b=\{\sqrt[3]{n}\}$.
Atunci condiţia din enunţ devine:

$$0,7<b<0,(7)\Leftrightarrow a+0,7<a+b<a+0,(7)\Leftrightarrow a+\frac{7}{10}<\sqrt[3]{n}<a+\frac{7}{9}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a^3+3a^2\cdot\frac{7}{10}+3a\cdot\frac{49}{100}+\frac{343}{1000}<n<a^3+3a^2\cdot\frac{7}{9}+3a\cdot\frac{49}{81}+\frac{343}{729},$$

unde $n \in \mathbb{N}$.

Pentru $a = 0 \Rightarrow \frac{343}{1000} < n < \frac{343}{729}$, absurd, deoarece $n \in \mathbb{N}$.

$$\text{Pentru } a = 1 \Rightarrow 1 + \frac{21}{10} + \frac{147}{100} + \frac{343}{1000} < n < 1 + \frac{21}{9} + \frac{147}{81} + \frac{343}{729} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{4913}{1000} < n < \frac{4096}{729} \Rightarrow n \in (4, 6) \Rightarrow n = 5.$$

Deci cel mai mic n pentru care avem condiţia din enunţ este 5.

Clasa a X-a

1. *Fie $n \in \mathbb{N}^* \backslash \{1\}$, $z_k = a_k + i \cdot b_k \in \mathbb{C}$, $k = \overline{1, n}$, unde $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ şi σ o permutare a mulţimii $\{1, 2, \ldots, n\}$. Să se arate că*

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{a_k^4 + b_{\sigma(k)}^4} \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sum_{k=1}^{n} |z_k|^2.$$

D.M. Bătineţu-Giurgiu

Soluţie. Din inegalitatea dintre media pătratică şi media aritmetică rezultă

$$\sqrt{\frac{(a_k^2)^2 + (b_{\sigma(k)}^2)^2}{2}} \geq \frac{a_k^2 + b_{\sigma(k)}^2}{2},$$

deci $\sqrt{a_k^4 + b_{\sigma(k)}^4} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}(a_k^2 + b_{\sigma(k)}^2)$, $k = \overline{1, n}$. Atunci

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{a_k^4 + b_{\sigma(k)}^4} \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_{\sigma(k)}^2)$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + \sum_{k=1}^{n} b_{\sigma(k)}^2 \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \right)$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{k=1}^{n} |z_k|^2.$$

2. *Să se rezolve în numere reale sistemul:*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 & = 9 \\ 3^{x^4 + y^2} + 3^{x^2 + y^4} & = 2 \cdot 3^{\frac{99}{4}}. \end{cases}$$

D.M. Bătineţu-Giurgiu

Soluţie. Notăm $a = x^2 \geq 0$ şi $b = y^2 \geq 0$ cu $a + b = 9$.
Folosind inegalitatea mediilor obţinem:

$$2 \cdot 3^{\frac{99}{4}} = 3^{a^2+b} + 3^{a+b^2} \geq 2 \cdot 3^{\frac{a+b+a^2+b^2}{2}},$$

deci $\quad \dfrac{99}{4} \geq \dfrac{a+b+a^2+b^2}{2}$.
Obţinem $99 \geq 2(a+b) + 2(a+b)^2 - 4ab$ şi cum $a + b = 9$, rezultă că

$$ab \geq \frac{81}{4}. \tag{1}$$

Din inegalitatea mediilor rezultă: $\quad 9 = a + b \geq 2\sqrt{ab}$, deci

$$ab \leq \frac{81}{4}. \tag{2}$$

Din (1) şi (2) obţinem $ab = \dfrac{81}{4}$. Folosind iarăşi $a + b = 9$, obţinem $a = b = \dfrac{9}{2}$ şi prin urmare soluţiile sistemului sunt:

$$\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right);\ \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{-3\sqrt{2}}{2}\right);\ \left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right);\ \left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{-3\sqrt{2}}{2}\right).$$

3. *Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $a > 1$ şi $x_1, x_2, \ldots, x_n > 1$ cu proprietatea $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = a^n$. Să se determine minimul expresiei*

$$E = \log_{x_1} a + \frac{1}{2}\log^2_{x_2} a + \cdots + \frac{1}{n} \cdot \log^n_{x_n} a.$$

Florin Bojor

Soluţie. Se observă că logaritmii sunt pozitivi, atunci aplicând inegalitatea mediilor avem $\log_{x_1} a + \log_a x_1 \geq 2$

$$\frac{1}{2}\log^2_{x_2} a + \log_a x_2 = \frac{1}{2}\log^2_{x_2} a + \frac{1}{2}\log_a x_2 + \frac{1}{2}\log_a x_2 \geq \frac{3}{2}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{n}\log^n_{x_n} a + \log_a x_n = \frac{1}{n}\log^n_{x_n} a + \frac{1}{n}\log_a x_n + \cdots + \frac{1}{n}\log_a x_n \geq \frac{n+1}{n}.$$

Adunând aceste inegalităţi se obţine

$$E + \log_a(x_1 x_2 \ldots x_n) \geq 2 + \frac{3}{2} + \cdots + \frac{n+1}{n},$$

adică $\ E \geq 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}$. Are loc egalitate atunci când $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = a$, deci minimul expresiei E este $\ 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}$.

4. *a) Să se demonstreze că*

$$\sqrt{t \cdot x_1 + (1-t)x_2} \geq t\sqrt{x_1} + (1-t)\sqrt{x_2},\ \forall\, t \in (0,1),\ \forall\, x_1, x_2 \geq 0.$$

b) Să se rezolve ecuaţia

$$3\sqrt{10x+1}+2\sqrt{3x+1}+\sqrt{6x+1}=6\sqrt{7x+1}.$$

Meda Bojor

Soluţie. $a)$ Se ridică relaţia la pătrat, se împarte cu $t(1-t)>0$ şi se obţine $x_1+x_2\geq 2\sqrt{x_1x_2}(A)$, deci funcţia radical este strict concavă.

$b)$ Ecuaţia se scrie

$$\frac{1}{2}\sqrt{10x+1}+\frac{1}{3}\sqrt{3x+1}+\frac{1}{6}\sqrt{6x+1}=\sqrt{7x+1},\text{ unde } x\geq-\frac{1}{10}.$$

Din $a)$ funcţia radical este strict concavă, deci

$$\sqrt{t_1x_1+t_2x_2+t_3x_3}\geq t_1\sqrt{x_1}+t_2\sqrt{x_2}+t_3\sqrt{x_3},$$

$\forall\, t_1,t_2,t_3\in(0,1)$, cu $t_1+t_2+t_3=1$ şi $\forall\, x_1,x_2,x_3\geq 0$.

Pentru $t_1=\dfrac{1}{2}$, $t_2=\dfrac{1}{3}$, $t_3=\dfrac{1}{6}$ şi $x_1=10x+1$, $x_2=3x+1$, $x_3=6x+1$, inegalitatea de mai sus devine

$$\sqrt{7x+1}\geq\frac{1}{2}\sqrt{10x+1}+\frac{1}{3}\sqrt{3x+1}+\frac{1}{6}\sqrt{6x+1}.$$

Deoarece funcţia radical este strict concavă, va rezulta că avem egalitate dacă şi numai dacă $10x+1=3x+1=6x+1\Rightarrow x=0$ este unica soluţie.

5. *Fie $\triangle ABC$ astfel încât $m(\sphericalangle A)=120^\circ$. Să se arate că $\dfrac{R}{r}\geq 1+\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$. Când avem egalitate?*

Gheorghe Boroica

Soluţie. Din teorema cosinusurilor şi ipoteză, găsim că $a^2=b^2+c^2+bc$. Avem:

$$\begin{aligned}\frac{R}{r}&=\frac{abc}{4S}\cdot\frac{p}{S}=\frac{abc(a+b+c)}{8\left(\frac{b\cdot c\cdot\sin A}{2}\right)^2}=\frac{2a(a+b+c)}{3bc}=\frac{2(a^2+a(b+c))}{3bc}\\&=\frac{2\left(b^2+c^2+bc+\sqrt{b^2+c^2+bc}\cdot(b+c)\right)^2}{3bc}\\&=\frac{2}{3}\left(1+\frac{b^2+c^2}{bc}+\frac{\sqrt{b^2+c^2+bc}\cdot(b+c)}{bc}\right).\end{aligned}\tag{1}$$

Deoarece $\dfrac{b+c}{2}\geq\sqrt{bc}$ şi $\sqrt{b^2+c^2+bc}\geq\sqrt{3bc}$, iar $b^2+c^2\geq 2bc$, folosind (1) deducem că

$$\frac{R}{r}\geq\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{2}+2\sqrt{3}\right)=1+\frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

Avem egalitate dacă $m(\measuredangle A)=120^\circ$ şi $b=c$.

6. *Se consideră $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ şi $A_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Să se afle numărul funcţiilor $f : A_n \to A_n$, ştiind că acestea au exact două puncte fixe.*

Gheorghe Boroica

Soluţie. Dacă $n = 2$, atunci există o unică astfel de funcţie: $f(1) = 1$ şi $f(2) = 2$.

Dacă $n \geq 3$, atunci cele două puncte fixe $a, b \in A_n$, $a \neq b$, se pot alege în C_n^2 moduri, iar pentru orice element $c \in A_n \backslash \{a, b\}$, imaginea sa se poate alege în $n-1$ moduri, deoarece $f(c) \neq c$. Rezultă că numărul cerut este egal cu $C_n^2(n-1)^{n-2}$, rezultat care este valabil şi în cazul $n = 2$.

7. *Fie funcţia $f : \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z} \to (0, 2)$, $f(x) = \{x\} + \{2x\}$.*

a) Să se arate că f nu este injectivă, dar este surjectivă.

b) Să se găsească o funcţie $g : (0, 2) \to \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$, astfel încât

$$\forall\, x \in (0, 2),\ (f \circ g)(x) = x.$$

c) Să se rezolve ecuaţia $f(f(x)) = x$, pentru $x \in (0, 1)$.

Dana Heuberger

Soluţie. *a)* $\forall\, x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$, $f(x + k) = f(x)$, deci f nu este injectivă.
Pentru $\alpha \in \left(0, \dfrac{3}{2}\right)$, $f\left(\dfrac{\alpha}{3}\right) = \dfrac{\alpha}{3} + \dfrac{2\alpha}{3} = \alpha$.
Pentru $a \in \left[\dfrac{3}{2}, 2\right)$, avem $\dfrac{\alpha - 2}{3} \in \left[-\dfrac{1}{6}, 0\right)$ şi $f\left(\dfrac{\alpha_2}{3}\right) = \dfrac{\alpha - 2}{3} + 1 + \dfrac{2(\alpha - 2)}{3} + 1 = \alpha$.
Deoarece orice $\alpha \in (0, 2)$ are preimagine, rezultă că f este surjectivă.

b) Din punctul *a)* deducem că funcţia

$$g : (0, 2) \to \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z},\ g(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{3}, & \alpha \in \left(0, \dfrac{3}{2}\right) \\ \dfrac{\alpha - 2}{3}, & \alpha \in \left[\dfrac{3}{2}, 2\right) \end{cases} \quad \text{este o soluţie.}$$

c) Pentru orice $x \in (0, 1)$, avem $f(x) = 3x - [x] - [2x]$, deci $\{f(x)\} = \{3x\}$ şi $\{2f(x)\} = \{6x\}$. Rezultă $f(f(x)) = \{3x\} + \{6x\} = 9x - [3x] - [6x]$.
Ecuaţia din enunţ devine:

$$[3x] + [6x] = 8x,\ x \in (0, 1). \tag{1}$$

Analizând situaţiile $x \in \left(0, \dfrac{1}{6}\right)$, $x \in \left[\dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{3}\right)$, $x \in \left[\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}\right)$, $x \in \left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}\right)$, $x \in \left[\dfrac{2}{3}, \dfrac{5}{6}\right)$, $x \in \left[\dfrac{5}{6}, 1\right)$, obţinem soluţiile $x_1 = \dfrac{3}{8}$, $x_2 = \dfrac{1}{2}$, $x_3 = \dfrac{3}{4}$, $x_4 = \dfrac{7}{8}$.

8. *Să se arate că*

$$2\left(\sqrt{2} + 1\right)\sqrt{15} < \left(2\sqrt{2} + 1\right)\sqrt{3}^{\sqrt{2}} + \left(3\sqrt{2} + 1\right)\sqrt{5}^{\sqrt{2}}.$$

Dana Heuberger

Soluţie. Vom folosi inegalitatea lui Young:

$$\forall\, x,y\in[0,\infty),\ \forall\, p,q\in(1,\infty),\ \text{cu}\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\ x\cdot y\le\frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}. \tag{1}$$

Egalitatea are loc în (1) dacă şi numai dacă $x^p=y^q$.
Pentru $p=\sqrt{2}$ şi $q=2+\sqrt{2}$, $x=\sqrt{3}$ şi $y=\sqrt{5}$ în (1), obţinem:

$$\sqrt{15}<\frac{\sqrt{3}^{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{5}^{2+\sqrt{2}}}{2+\sqrt{2}}\Leftrightarrow\left(2+\sqrt{2}\right)\sqrt{15}<\left(\sqrt{2}+1\right)\cdot\sqrt{3}^{\sqrt{2}}+\sqrt{5}^{2+\sqrt{2}}. \tag{2}$$

Deoarece $\sqrt{3}^{\sqrt{2}}<\sqrt{5}^{2+\sqrt{2}}$, inegalitatea precedentă este strictă. Pentru $p=\sqrt{2}$ şi $q=2+\sqrt{2}$, $x=\sqrt{5}$ şi $y=\sqrt{3}$ în (1), obţinem:

$$\sqrt{15}<\frac{\sqrt{5}^{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}^{2+\sqrt{2}}}{2+\sqrt{2}}\Leftrightarrow\left(2+\sqrt{2}\right)\sqrt{15}<\left(\sqrt{2}+1\right)\cdot\sqrt{5}^{\sqrt{2}}+\sqrt{3}^{2+\sqrt{2}}. \tag{3}$$

Deoarece $\sqrt{5}^{\sqrt{2}}<\sqrt{3}^{2+\sqrt{2}}$, inegalitatea precedentă este strictă. Adunând inegalităţile (2) şi (3), obţinem:

$$2\left(\sqrt{2}+2\right)\sqrt{15}<\left(\sqrt{2}+4\right)\cdot\sqrt{3}^{\sqrt{2}}+\left(\sqrt{2}+6\right)\cdot\sqrt{5}^{\sqrt{2}}.$$

Împărţind cu $\sqrt{2}$ inegalitatea precedentă, rezultă concluzia.

9. *Să se arate că, oricum am alege şapte numere diferite din intervalul* $[-1,1]$, *putem găsi două numere* a *şi* b *care* $\sqrt{3}\le 2\left(a\cdot b+\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}\right)<2$.

Ludovic Longaver

Soluţie. Funcţia $f:[0,\pi]\to[-1,1]$, $f(t)=\cos t$ este bijectivă, deci pentru orice $x\in[-1,1]$ există un unic $t\in[0,\pi]$ astfel încât $x=\cos t$. Partiţionăm intervalul $[0,\pi]$ în şase părţi de lungime $\frac{\pi}{6}$. Pe baza principiului cutiei, printre cele şapte numere alese aleator, vor exista două, $a=\cos\alpha$ şi $b=\cos\beta$, astfel încât α şi β vor fi în acelaşi subinterval de lungime $\frac{\pi}{6}$, deci $|\alpha-\beta|\le\frac{\pi}{6}$.
Pe baza monotoniei funcţiei cosinus obţinem:

$$\cos\frac{\pi}{6}\le\cos(\alpha-\beta)<1\Leftrightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}\le ab+\sqrt{(1-a^2)(1-\beta^2)}<1\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\sqrt{3}\le 2\left(ab+\sqrt{(1-a^2)(1-\beta^2)}\right)<2.$$

10. *Fie* $\varepsilon\in\mathbb{C}\backslash\{1\}$, $\varepsilon^3=1$ *şi* ABC *un triunghi nedreptunghic. Să se arate că*

$$a(\cos A+\cos B\cdot\cos C)+b\cdot\varepsilon(\cos B+\cos C\cdot\cos A)+c\cdot\varepsilon^2(\cos C+\cos A\cdot\cos B)=0.$$

Ludovic Longaver

Soluţie. Se ştie că în orice triunghi ABC are loc relaţia: $a = b\cos C + c\cos B$. Împărţind cu $\cos B \cdot \cos C \neq 0$, rezultă: $\dfrac{a}{\cos B \cdot \cos C} = \dfrac{b}{\cos B} + \dfrac{c}{\cos C}$.
Analog obţinem:

$$\frac{b}{\cos C \cdot \cos A} = \frac{c}{\cos C} + \frac{a}{\cos A} \quad \text{şi} \quad \frac{c}{\cos A \cdot \cos B} = \frac{a}{\cos A} + \frac{b}{\cos B}.$$

Atunci

$$\begin{aligned}&\frac{a}{\cos B \cdot \cos C} + \frac{b \cdot \varepsilon}{\cos C \cdot \cos A} + \frac{c \cdot \varepsilon^2}{\cos A \cdot \cos B}\\ &= \frac{b(1+\varepsilon^2)}{\cos B} + \frac{c(1+\varepsilon)}{\cos C} + \frac{a(\varepsilon+\varepsilon^2)}{\cos A}.\end{aligned}$$

Cum $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$, obţinem:

$$\begin{aligned}&\frac{a}{\cos B \cdot \cos C} + \frac{b\varepsilon}{\cos C \cdot \cos A} + \frac{c\varepsilon^2}{\cos A \cdot \cos B}\\ &= -\frac{\varepsilon b}{\cos B} - \frac{\varepsilon^2 c}{\cos C} - \frac{a}{\cos A}\end{aligned}$$

şi de aici deducem relaţia dată.

11. *Se dau funcţiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x + 4$, $g(x) = x - \sin^2(x-2)$. Să se rezolve ecuaţia $f(f(x)) = g(g(x))$.*

Ludovic Longaver

Soluţie. Avem $f(x) = x^2 - 3x + 4 = (x-2)^2 + x \geq x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, cu egalitate numai pentru $x = 2$. Din $f(x) \geq x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, rezultă: $f(f(x)) \geq f(x) \geq x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, cu egalitate pentru $x = 2$. Din $g(x) = x - \sin^2(x-2)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, rezultă $g(x) \leq x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$ cu egalitate pentru $x - 2 = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Atunci $g(g(x)) \leq g(x) \leq x$, $\forall\, x \in \mathbb{Z}$, cu egalitate pentru $x - 2 = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Deci $g(g(x)) \leq f(f(x))$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, cu egalitate numai pentru $x = 2$.

12. *Să se rezolve ecuaţia:*

$$2^x \cdot 3^{1-x} + 2^{1-x} \cdot 3^x = x(1-x) + 5.$$

Nicolae Muşuroia

Soluţie. Considerăm funcţiile $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$, $f(x) = 3\left(\dfrac{2}{3}\right)^x + \dfrac{2}{\left(\frac{2}{3}\right)^x}$, $u : \mathbb{R} \to (0, \infty)$, $u(x) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^x$; $v : (0, \infty) \to (0, \infty)$, $v(x) = 3x + \dfrac{2}{x}$ şi $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = -x^2 + x + 5$.
Ecuaţia dată se scrie:

$$f(x) = g(x). \tag{1}$$

Se verifică că v este strict descrescătoare pe $\left(0,\sqrt{\dfrac{2}{3}}\,\right]$ şi strict crescătoare pe $\left[\sqrt{\dfrac{2}{3}},\infty\right)$. Cum $u:\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right]\to\left[\sqrt{\dfrac{2}{3}},\infty\right)$, $u(x)=\left(\dfrac{2}{3}\right)^x$ este strict descrescătoare, iar $v:\left[\sqrt{\dfrac{2}{3}},\infty\right)\to(0,\infty)$ este strict crescătoare, deducem că $v\circ u=f$ este strict descrescătoare pe $\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right]$. (2)

Analog deducem că $v\circ u=f$ este strict crescătoare pe $\left[\dfrac{1}{2},\infty\right)$. (3)

Dar g este strict crescătoare pe $\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right]$ (4)

şi strict descrescătoare pe $\left[\dfrac{1}{2},\infty\right)$. (5)

Din (1), (2) şi (4) respectiv (1), (3) şi (5) deducem că ecuaţia dată are cel mult câte o soluţie pe fiecare din intervalele $\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right]$, respectiv $\left[\dfrac{1}{2},\infty\right)$.

Cum $x_1=0\in\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right]$ şi $x_2=1\in\left[\dfrac{1}{2},\infty\right)$ sunt soluţii, deducem că acestea sunt singurele soluţii.

13. *Pe laturile patrulaterului convex $ABCD$ se construiesc triunghiurile echilaterale ABM şi CDP spre exterior şi BCN şi ADQ spre interior.*
Să se arate că $MNPQ$ este paralelogram (eventual paralelogram degenerat).

Nicolae Muşuroia

Soluţie. Notăm cu litera mică corespunzătoare afixele vârfurilor. Triunghiurile ABM, CDP, BCN şi ADQ fiind echilaterale rezultă:

$$m=a+(b-a)\varepsilon;\quad p=c+(d-c)\varepsilon;\quad n=c+(b-c)\varepsilon;\quad q=a+(d-a)\varepsilon$$

unde $q=\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}$. Atunci

$$m+p=(a+c)+(b+d-a-c)\varepsilon\quad\text{şi}$$
$$n+q=(a+c)+(b+d-a-c)\varepsilon,$$

deci $m+p=n+q$ şi prin urmare $MNPQ$ este paralelogram.

14. *Să se arate că, dacă a,b,c sunt lungimile laturilor unui triunghi având raza cercului înscris egală cu unitatea, atunci*

$$4(a+b+c)\le abc.$$

Mihai Vijdeluc şi Vasile Ienuţaş

Soluţie. Inegalitatea cerută se scrie echivalent:

$$4(a+b+c) \leq abc \Leftrightarrow 8p \leq 4RS \Leftrightarrow 2p \leq R\,p \cdot r \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow Rr \geq 2 \overset{r=1}{\Longleftrightarrow} R \geq 2r \quad \text{(relaţia lui Euler)},$$

adevărată în orice triunghi.

15. *Să se demonstreze că triunghiul ABC este echilateral, dacă şi numai dacă avem inegalitatea*

$$b \cdot \sqrt{ac} \cdot \cos\frac{A}{2} \cdot \cos\frac{C}{2} \leq \ell_a \cdot \ell_c$$

(ℓ_a, ℓ_c sunt bisectoarele interioare ale unghiurilor A, respectiv C).

Mihai Vijdeluc

Soluţie. ”$\Rightarrow$” Dacă $\triangle ABC$ este echilateral atunci $b\sqrt{ac}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2} = \frac{3a^2}{4}$ şi $\ell_a\ell_c = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3a^2}{4}$, deci $b\sqrt{ac}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2} = \ell_a\ell_c$.

”$\Leftarrow$” Din

$$b\sqrt{ac}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2} \leq \ell_a\ell_c \Rightarrow$$
$$\Rightarrow b\sqrt{ac}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2} \leq \frac{2bc}{b+c} \cdot \frac{2ab}{a+b}\cos\frac{A}{2} \cdot \cos\frac{C}{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (b+c)(a+b) \leq 4b\sqrt{ac} \qquad (1)$$

Dar, din inegalitatea mediilor avem: $(b+c)(a+b) \geq 2\sqrt{bc} \cdot 2\sqrt{ab}$, deci

$$(b+c)(a+b) \geq 4b\sqrt{ac} \qquad (2)$$

Din (1) şi (2) rezultă că $(a+b)(b+c) = 4b\sqrt{ac}$, deci $a = b = c$, adică $\triangle ABC$ este echilateral.

Clasa a XI-a

1. Dacă $A(x) = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R}^*$, să se calculeze

$$A(1) \cdot \prod_{k=1}^{n} A(x_k),\ n \in \mathbb{N}^*,\ x_k \in \mathbb{R}^*,\ k = \overline{1,n}.$$

D.M. Bătineţu-Giurgiu

Soluţie. $A(1)=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ şi $A(1)\cdot A(x)=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x&1\\1&x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+1&x+1\\x+1&x+1\end{pmatrix}=(x+1)A(1)$, $\forall\, x\in\mathbb{R}^*$. Prin urmare

$$\begin{aligned}
A(1)\prod_{k=1}^{n}A(x_k)&=A(1)A(x_1)\prod_{k=2}^{n}A(x_k)=(x_1+1)\cdot A(1)\prod_{k=2}^{n}A(x_k)\\
&=(x_1+1)(A(1)\cdot A(x_2))\prod_{k=3}^{n}A(x_k)=(x_1+1)(x_2+1)A(1)\prod_{k=3}^{n}A(x_k)\\
&=(x_1+1)(x_2+1)\dots(x_{n-1}+1)A(1)\cdot A(x_n)\\
&=(x_1+1)(x_2+1)\dots(x_n+1)A(1)\\
&=\left(\prod_{k=1}^{n}(x_k+1)\right)A(1)=\begin{pmatrix}\prod\limits_{k=1}^{n}(x_k+1)&\prod\limits_{k=1}^{n}(x_k+1)\\\prod\limits_{k=1}^{n}(x_k+1)&\prod\limits_{k=1}^{n}(x_k+1)\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

De exemplu:

$$\begin{aligned}
A(1)\cdot A(1)\cdot A(2)\dots A(n)&=2\cdot 3\dots n(n+1)\cdot A(1)=(n+1)!A(1)\\
&=\begin{pmatrix}(n+1)!&(n+1)!\\(n+1)!&(n+1)!\end{pmatrix},\ \forall\, n\in\mathbb{N}^*.
\end{aligned}$$

2. *Dacă $m\in\mathbb{N}$, să se calculeze:*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(\sqrt[n+1]{(n+1)!}\right)^{m+1}-\left(\sqrt[n]{n!}\right)^{m+1}\right)\sin^m\frac{\pi}{n}.$$

D.M. Bătineţu-Giurgiu

Soluţia 1.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{n!}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}=\frac{1}{e}$$

şi

$$\lim_{n\to\infty}n\cdot\sin\frac{\pi}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}\pi=1\cdot\pi=\pi.$$

Deci

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left(\left(\sqrt[n+1]{(n+1)!}\right)^{m+1}-\left(\sqrt[n]{n!}\right)^{m+1}\right)\sin^m\frac{\pi}{n}\\
&=\lim_{n\to\infty}n^{-m}\left(\left(\sqrt[n+1]{(n+1)!}\right)^{m+1}-\left(\sqrt[n]{n!}\right)^{m+1}\right)\left(n\sin\frac{\pi}{n}\right)^m\\
&=\pi^m\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n+1]{(n+1)!}-\sqrt[n]{n!}\right)\frac{1}{n^m}\left[\left(\sqrt{(n+1)!}\right)^m\right.\\
&\left.+\left(\sqrt[n+1]{(n+1)!}\right)^{m-1}\sqrt[n]{n!}+\dots+\sqrt[n+1]{(n+1)!}\left(\sqrt[n]{n!}\right)^{m-1}+\left(\sqrt[n]{n!}\right)^m\right]=
\end{aligned}$$

$$= \pi^m \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n+1]{(n+1)!} - \sqrt[n]{n!} \right) \left[\left(\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{n+1} \right)^m \left(\frac{n+1}{n} \right)^m \right.$$

$$+ \left(\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{n+1} \right)^{m-1} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{m-1} + \dots$$

$$\left. + \frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{n+1} \left(\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \right)^{m-1} \frac{n+1}{n} + \left(\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \right)^m \right]$$

$$= \pi^m \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n+1]{(n+1)!} - \sqrt[n]{n!} \right) \left(\left(\frac{1}{e} \right)^m + \left(\frac{1}{e} \right)^{m-1} \frac{1}{e} \cdot 1 + \ldots + \frac{1}{e} \left(\frac{1}{e} \right)^{m-1} \cdot 1 + \left(\frac{1}{e} \right)^m \right)$$

$$= \frac{\pi^m (m+1)}{e^m} \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n+1]{(n+1)!} - \sqrt[n]{n!} \right) = \frac{(m+1)\pi^m}{e^m} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}(u_n - 1)$$

$$= \frac{(m+1)\pi^m}{e^m} \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \cdot \frac{u_n - 1}{\ln u_n} n \ln u_n$$

$$= \frac{(m+1)\pi^m}{e^m} \cdot \frac{1}{e} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{u_n - 1}{\ln v_n} \ln u_n^n , \tag{1}$$

unde $u_n = \dfrac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}}$, $\forall\, n \geq 2$ cu

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{n+1} \cdot \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \cdot \frac{n+1}{n} \right) = \frac{1}{e} \cdot e \cdot 1 = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{u_n - 1}{\ln u_n} = 1$$

şi

$$\lim_{n\to\infty} u_n^n = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{1}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}} = e.$$

Prin urmare din (1) obţinem:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\left(\sqrt[n+1]{(n+1)!} \right)^{m+1} - \left(\sqrt[n]{n!} \right)^{m+1} \right) \sin^m \frac{\pi}{n}$$

$$= \frac{(m+1)\pi^m}{e^m} \cdot \frac{1}{e} \cdot 1 \cdot \ln e = \frac{(m+1)\pi^m}{e^{m+1}} .$$

Soluţia 2.

$$B_n = \left(\left(\sqrt[n+1]{(n+1)!} \right)^{m+1} - \left(\sqrt[n]{n!} \right)^{m+1} \right) \sin^m \frac{\pi}{n}$$

$$= \left(\sqrt[n]{n!} \right)^{m+1} (u_n^{m+1} - 1) \sin^m \frac{\pi}{n}$$

$$= \left(\sqrt[n]{n!} \right)^{m+1} \frac{u_n^{m+1} - 1}{(m+1)\ln u_n} (m+1) \ln u_n \sin^m \frac{\pi}{n}$$

$$= (m+1) \left(\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \right)^{m+1} \frac{u_n^{m+1} - 1}{(m+1)\ln u_n} \left(\frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} \right)^m n^m, \ \forall\, n \geq 2,$$

atunci
$$\lim_{n\to\infty} B_n = (m+1)\left(\frac{1}{e}\right)^{m+1} 1(\ln e)1(\pi)^m = \frac{(m+1)\pi^m}{e^{m+1}}.$$

3. *Fie* $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}^*$ *o funcţie pentru care există* $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=a\in\mathbb{R}_+^*$. *Atunci există* $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x+1)-f(x))=b\in\mathbb{R}$, *dacă şi numai dacă există*
$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x+1)}{f(x)}\right)^x = c\in\mathbb{R}^*$$
şi avem $b=a\cdot\ln c$.

D.M. Bătineţu-Giurgiu

Soluţie.
$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x+1)}{f(x)} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x+1)}{x+1}\cdot\frac{x}{f(x)}\cdot\frac{x+1}{x}\right) = a\cdot\frac{1}{a}\cdot 1 = 1$$
deci
$$f(x+1)-f(x) = f(x)\left(\frac{f(x+1)}{f(x)}-1\right) = f(x)\cdot(u(x)-1),\ \forall\, x\in\mathbb{R}_+^*,$$
unde $\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}_+^*$, $u(x)=\frac{f(x+1)}{f(x)}$ şi unde $\lim\limits_{x\to\infty}u(x)=1$. Rezultă atunci că $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{u(x)-1}{\ln u(x)}=1$. Prin urmare,
$$\begin{aligned} f(x+1)-f(x) &= f(x)\cdot(u(x)-1) = \frac{f(x)}{x}x(u(x)-1)\\ &= \frac{f(x)}{x}\cdot\frac{u(x)-1}{\ln u(x)}\,x\ln u(x) = \frac{f(x)}{x}\cdot\frac{u(x)-1}{\ln u(x)}\ \ln(u(x))^x\\ &= \frac{f(x)}{x}\cdot\frac{u(x)-1}{\ln u(x)}\ \ln\left(\frac{f(x+1)}{f(x)}\right)^x,\ \forall\, x\in\mathbb{R}_+^*. \qquad (1)\end{aligned}$$
Dacă există $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x+1)-f(x))=b$, din (1) deducem că
$$b = a\cdot 1\cdot\ln\left(\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x+1)}{f(x)}\right)^x\right) \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x+1)}{f(x)}\right)^x = e^{\frac{b}{a}} = c\in\mathbb{R}_+^*.$$
Reciproc, dacă există $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{f(x+1)}{f(x)}\right)^x = c\in\mathbb{R}_+^*$, atunci din (1) rezultă că există
$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x+1)-f(x)) = a\cdot 1\cdot\ln c.$$
Cu aceasta problema este rezolvată.

4. *Să se calculeze* $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\left(2-\dfrac{1}{\cos\dfrac{a}{2^k}}\right)$ *unde* $a\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Florin Bojor

Soluţie.

$$\prod_{k=1}^{n}\left(2-\frac{1}{\cos\frac{a}{2^k}}\right)=\frac{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(2\cos\frac{a}{2^k}-1\right)}{\prod\limits_{k=1}^{n}\cos\frac{a}{2^k}}=\frac{\prod\limits_{k=1}^{n}\dfrac{4\cos^2\frac{a}{2^k}-1}{2\cos\frac{a}{2^k}+1}}{\prod\limits_{k=1}^{n}\dfrac{2\sin\frac{a}{2^k}\cos\frac{a}{2^k}}{2\sin\frac{a}{2^k}}}$$

$$=\frac{\prod\limits_{k=1}^{n}\dfrac{2\cos\frac{a}{2^{k-1}}+1}{2\cos\frac{a}{2^k}+1}}{\prod\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\sin\frac{a}{2^{k-1}}}{2\sin\frac{a}{2^k}}}=\frac{2\cos a+1}{\sin a}\cdot\frac{2^n\sin\frac{a}{2^n}}{2\cos\frac{a}{2^n}+1}.$$

De unde limita este $a\cdot\dfrac{2\cos a+1}{\sin a}$.

5. *Să se determine matricele* $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ *care au determinantul egal cu* 1 *şi verifică relaţia* $(A^*)^2+A=2I_2$, *unde* A^* *este adjuncta matricei* A.

Florin Bojor

Soluţie. Deoarece $\det(A)=1$, atunci $A\cdot A^*=I_2$ şi înmulţind relaţia din ipoteză cu A^2 se obţine

$$I_2+A^3=2A^2. \tag{1}$$

Atunci rădăcinile polinomului $f=X^3-2X^2+1$ sunt $1,\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ şi acestea pot fi valorile proprii ale matricei A.

Dacă λ_1,λ_2 sunt valorile proprii, atunci $\det(A)=\lambda_1\cdot\lambda_2=1$, în consecinţă $\lambda_1=\lambda_2=1$. Atunci $A^2-2A+I_2=O_2\Rightarrow A^2=2A-I_2\Rightarrow A^3=3A-2I_2$ şi înlocuind în (1) se obţine $A=I_2$.

6. *Fie a un număr real, astfel încât* $a>2$. *Să se arate că nu există* $A\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, *astfel încât* $A^3-3A+aI_3=O_3$ *şi* $\det(A+2I_3)\geq 0$.

Gheorghe Boroica

Soluţie. Presupunem contrariul, deci există $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ca şi în enunţ. Atunci avem:

$$A^3 - 3A + aI_3 = O_3 \Leftrightarrow A^3 - 3A + 2I_3 = 2I_3 - aI_3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (A - I_3)^2(A + 2I_3) = (2 - a)I_3.$$

Atunci $\det(A - I_3)^2 \cdot \det(A + 2I_3) = (2 - a)^3$, contradicţie, deoarece membrul stâng e pozitiv şi $2 - a < 0$.

7. *Fie $A \in M_{2p+1}(\mathbb{Z})$, $p \in \mathbb{N}^*$ şi $m, n \in \mathbb{Z}$. Să se arate că $m + n$ divide determinantul matrice $mA + nA^t$.*

(Generalizarea problemei 26770, G.M. 5/2013)
Gheorghe Boroica

Soluţie. Fie funcţia polinomială $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \det(A + x \cdot A^t) = a_{2p+1} \cdot x^{2p+1} + a_{2p} \cdot x^{2p} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

unde $a_k \in \mathbb{Z}$, $k = \overline{0, 2p+1}$ şi $a_0 = \det A$; $a_{2p+1} = \det(A^t)$, deci $a_0 = a_{2p+1}$.
Pentru $x \in \mathbb{R}^*$ avem:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \det(A + xA^t) = \det(A + xA^t)^t = \det(A^t + xA)\\
&= \det x\left(A + \frac{1}{x}\,A^t\right) = x^{2p+1}\det\left(A + \frac{1}{x}\,A^t\right) = x^{2p+1} f\left(\frac{1}{x}\right)\\
&= x^{2p+1}\left(\frac{a_{2p+1}}{x^{2p+1}} + \frac{a_{2p}}{x^{2p}} + \cdots + \frac{a_1}{x} + a_0\right)\\
&= a_{2p+1} + a_{2p} \cdot x + \cdots + a_1 \cdot x^{2p} + a_0 \cdot x^{2p+1},
\end{aligned}$$

deci

$$\begin{aligned}
&a_{2p+1}x^{2p+1} + a_{2p}x^{2p} + \cdots + a_1 x + a_0\\
&= a_0 x^{2p+1} + a_1 x^{2p} + \cdots + a_{2p}x + a_{2p+1},\ \forall x \in \mathbb{R}^*.
\end{aligned}$$

De aici rezultă că

$$a_{2p+1} = a_0,\ a_{2p} = a_1,\ a_{2p-1} = a_2, \ldots \tag{1}$$

Avem că

$$\begin{aligned}
\det(mA + nA^t) &= \det m\left(A + \frac{n}{m}\,A^t\right) = m^{2p+1} f\left(\frac{n}{m}\right)\\
&= m^{2p+1}\left(a_{2p+1}\frac{n^{2p+1}}{m^{2p+1}} + a_{2p}\frac{n^{2p}}{m^{2p}} + \cdots + a_1\frac{n}{m} + a_0\right)\\
&= a_{2p+1}n^{2p+1} + a_{2p}n^{2p}m + a_{2p-1}n^{2p-1}m^2 + \cdots + a_1 n m^{2p} + a_0 m^{2p+1} \overset{(1)}{=}\\
&= a_{2p+1}(n^{2p+1} + m^{2p+1}) + a_{2p}n \cdot m(n^{2p-1} + m^{2p-1}) + \ldots\\
&\quad + a_{p+1}n^p \cdot m^p(n + m) \,\vdots\, (n + m),
\end{aligned}$$

căci $n^{2k+1} + m^{2k+1} \,\vdots\, (n + m)$, $k \in \mathbb{N}$.

8. *Există funcţii derivabile neconstante $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea: dacă $f'(x)\in\mathbb{Z}$, atunci $f(x)\in\mathbb{Z}$?*

Gheorghe Boroica

Soluţie. Răspunsul este da. Pentru fiecare $c\in\mathbb{Z}$, funcţia $f_c:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_c(x)=\dfrac{x^2}{4}+c$ este derivabilă şi $f_c'(x)=\dfrac{x}{2}$. Atunci $f_c'(x)\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\dfrac{x}{2}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x=2k,\ k\in\mathbb{Z}$.
Cum $f_c(2k)=k^2+c\in\mathbb{Z}$, deducem că funcţiile f_c convin pentru orice $c\in\mathbb{Z}$. Aşadar, există chiar o infinitate de funcţii ca şi în enunţ.

9. *Jocul 15-puzzle este reprezentat de un pătrat 4×4 care are inscripţionat aleator numerele $1,2,3,\ldots,15$ şi având un pătrat liber (notat cu #). Prin mutări succesive, (o mutare înseamnă o deplasare pe orizontală sau verticală a uneia dintre piesele aflate lângă pătratul liber, astfel încât să îl ocupe pe acesta) jocul se încheie atunci când numerele sunt aşezate crescător pe linii, de la stânga la dreapta, începând cu prima linie de sus. Se cere să se analizeze dacă există o posibilitate de a încheia jocul, dacă pe tablă se află poziţia descrisă mai jos.*

4	8	3	15
10	11	1	9
2	5	13	12
6	7	14	#

Costel Chiteş

Soluţie. Asociem poziţiei pieselor permutarea σ de grad 16:

$$\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10&11&12&13&14&15&16\\4&8&3&15&10&11&1&9&2&5&13&12&6&7&14&16\end{pmatrix},$$

unde am notat căsuţa liberă $\#=16$. Prin înmulţiri succesive la stânga ale permutării σ cu transpoziţii de forma $\tau_{i16}=\begin{pmatrix}i & 16\end{pmatrix}$, jocul se încheie atunci când vom obţine:

$$\tau_k\cdot\tau_{k-1}\ldots\tau_1\cdot\sigma=e. \tag{1}$$

Prin mutări succesive putem realiza $u=$ up, $d=$ down, $l=$ left, $r=$ right.
Deducem $u=d$ şi $l=r$, deoarece trebuie să revenim de fiecare dată.
Deci $k=u+d+l+r=2u+2l=2(u+l)$. Rezultă că, în cazul încheierii cu succes a jocului, permutarea σ este pară. Se aplică funcţia signatură ε relaţiei (1). Analizăm acum paritatea permutării σ. Cum $\varepsilon(\sigma)=-1$, rezultă imposibilitatea de a termina jocul în cazul prezentat.

10. *Fie $A\in\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, astfel încât $A^2=I_3$. Aflaţi urma matricei A.*

Gotha Güntter

Soluţie. Din relaţia Cayley-Hamilton avem:

$A^3 - tA^2 + \frac{1}{2}[t^2 - tr(A^2)]A - \det(A)I_3 = O_3 \Leftrightarrow A - tI_3 + \frac{1}{2}[t^2 - 3]A - \det(A)I_3 = O_3 \Leftrightarrow$
$\frac{1}{2}(t^2-1)A - [t + \det(A)]I_3 = O_3 \Leftrightarrow (t^2-1)A = [2t + 2\det(A)]I_3$, unde $t = tr(A)$.
Trecând la urmă şi la determinant, obţinem sistemul

$$\begin{cases} (t^2-1)t = 3[2t + 2\det(A)] \\ (t^2-1)^3\det(A) = [2t+2\det(A)]^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^3 - 7t - 6\det(A) = 0 \\ (t^2-1)^3\det(A) = [2t+2\det(A)]^3 \end{cases} \tag{1}$$

Din $A^2 = I_3$ rezultă $(\det A)^2 = 1$, deci $\det A \in \{\pm 1\}$.

Cazul $\det(A) = 1$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} t^3 - 7t - 6 = 0 \\ (t^2-1)^3 = (2t+2)^3 \end{cases} \tag{2}$$

$t^3 - 7t - 6 = 0 \Leftrightarrow (t+2)(t+1)(t-3) = 0 \Rightarrow t \in \{-2, -1, 3\}$.
$t = -2 : (2) \Leftrightarrow 27 = -8$, fals; $t = -1 : (2) \Leftrightarrow 0 = 0$, adevărat; $t = 3 : (2) \Leftrightarrow 8^3 = 8^3$, adevărat. Deducem

$$t \in \{-1, 3\} \tag{3}$$

Cazul $\det(A) = -1$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} t^3 - 7t + 6 = 0 \\ -(t^2-1)^3 = [2t-2]^3 \end{cases} \tag{4}$$

$t^3 - 7t + 6 = 0 \Leftrightarrow (t+3)(t-1)(t-2) = 0 \Rightarrow t \in \{-3, 1, 2\}$.
$t = -3 : (4) \Leftrightarrow -8^3 = -8^3$, adevărat; $t = 1 : (4) \Leftrightarrow 0 = 0$, adevărat; $t = 2 : (4) \Leftrightarrow 27 = 8$, fals. Deducem

$$t \in \{-3, 1\}. \tag{5}$$

Din (3), (5) $\Rightarrow t \in \{\pm 1, \pm 3\}$.
Mai rămâne de arătat că există matricea $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ cu $A^2 = I_3$ şi $tr(A) = t$, oricare ar fi $t \in \{-1, 1, \pm 3\}$.

Pentru $t = -1$ alegem $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Pentru $t = 1$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Pentru $t = 3$, $A = I_3$; $t = -3$; $A = -I_3$.
În concluzie, mulţimea valorilor posibile lui $tr(A)$ este $\{-1, 1, -3, 3\}$.

11. *Fie $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ şi $x_1, x_2, \ldots, x_k$ numere reale, astfel încât*

$$\left| k - \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{n}{n+i} \right)^{x_i} \right| \leq \frac{1}{n\sqrt[k]{n}}, \ \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$$

Să se demonstreze că $x_1 + 2x_2 + \cdots + kx_k = 0$.

Gotha Güntter

Soluţie.

$$\left|k-\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{n}{n+i}\right)^{x_i}\right|=\left|\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{n}{n+i}\right)^{x_i}-k\right|=\left|\sum_{i=1}^{k}\left(\left(\frac{n}{n+i}\right)^{x_i}-1\right)\right|\le\frac{1}{n\sqrt[k]{n}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left|\sum_{i=1}^{k}\frac{\left(1+\dfrac{-i}{n+i}\right)^{x_i}-1}{\dfrac{1}{n}}\right|=\left|\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{-ni}{n+i}\cdot\frac{\left(1+\dfrac{-i}{n+i}\right)^{x_i}-1}{\dfrac{-i}{n+i}}\right)\right|\le\frac{1}{\sqrt[k]{n}}.$$

Având în vedere că $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-i}{n+i}=0$, trecând la limită, obţinem:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{-ni}{n+i}\cdot\frac{\left(1+\dfrac{-i}{n+i}\right)^{x_i}-1}{\dfrac{-i}{n+i}}\right)\right|=\left|\sum_{i=1}^{k}-i\cdot x_i\right|$$
$$=\left|\sum_{i=1}^{k}i\cdot x_i\right|\le\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[k]{n}}=0.$$

Deducem că $\sum\limits_{i=1}^{k}i\cdot x_i=0$, ceea ce trebuia arătat.

12. *Fie $A,B,C,D\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, astfel încât $ABCD=I_n$.*
a) Să se arate că $rang(BC+I_n)=rang(DA+I_n)$.
b) Să se arate că

$$rang(DA-I_n)\le$$
$$\le\frac{1}{2}\left[rang(A+I_n)+rang(B+I_n)+rang(C+I_n)+rang(D+I_n)\right].$$

Dana Heuberger

Soluţie. a) Avem $BCDA=I_n$. Folosind teorema lui Sylvester, deducem:

$$rang(BC+I_n)=rang(BC(I_n+DA))\ge rang(BC)+rang(DA+I_n)-n.$$

Aşadar $rang(BC+I_n)\ge rang(DA+I_n)$.
Apoi, $rang(DA+I_n)=rang(DA(I_n+BC))\ge rang(DA)+rang(BC+I_n)-n$.
Aşadar $rang(DA+I_n)\ge rang(BC+I_n)$.
Rezultă că $rang(DA+I_n)=rang(BC+I_n)$.

b) Analog se arată că $rang(DA-I_n)=rang(BC-I_n)$.
Apoi, din $BC-I_n=B(C+I_n)-(B+I_n)$, obţinem:

$$rang(DA-I_n)=rang(BC-I_n)\le rang(B(C+I_n))+rang(B+I_n)$$

deci

$$rang(DA - I_n) \leq rang(C + I_n) + rang(B + I_n) \tag{1}$$

şi din $DA - I_n = D(A + I_n) - (D + I_n)$, obţinem:

$$rang(DA - I_n) \leq rang(D(A + I_n)) + rang(D + I_n),$$

adică

$$rang(DA - I_n) \leq rang(A + I_n) + rang(D + I_n). \tag{2}$$

Adunând relaţiile (1) şi (2), deducem concluzia.

13. *Să se calculeze*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{5\cdot 6}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)2n}\right).$$

Ludovic Longaver

Soluţie.

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{5\cdot 6}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\to\ln 2.$$

14. *Fie $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ două matice cu proprietăţile $A\cdot B = B\cdot A$,*

$$\det(A + iB) = \det(A) - i\det(B); \quad \det(A - iB) = \det(A) + i\det(B).$$

Să se demonstreze că $\det(A^3 + B^3) = \det^3(A + B)$.

Nicolae Muşuroia

Soluţie. Fie $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(x) = \det(A + xB)$. Relaţiile din ipoteză se scriu:

$$\begin{cases} f(i) &= \det(A) - i\det B \qquad (1)\\ f(-i) &= \det(A) + i\det B. \qquad (2)\end{cases}$$

Dar $f(x) = \det(A) + \alpha x + \beta x^2 + x^3\det(B)$ şi

$$f(i) = \det(A) + \alpha i - \beta - i\det(B) \tag{3}$$

$$f(-i) = \det(A) - \alpha i - \beta + i\det(B) \tag{4}$$

Din (1) şi (3) respectiv (2) şi (4) rezultă:

$$\alpha i - \beta = 0 \quad \text{şi} \quad -\alpha i - \beta = 0,$$

deci $\alpha = \beta = 0$ şi $f(x) = \det(A) + x^3\det(B)$.
Din $AB = BA$ rezultă că
$A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2) = (A + B)(A + \varepsilon B)(A + \varepsilon^2 B)$,
unde $\varepsilon^3 = 1$ şi $\varepsilon \neq 1$.
Atunci $\det(A^3 + B^3) = f(1)\cdot f(\varepsilon)\cdot f(\varepsilon^2) = (\det(A + B))^3$.

15. *Fie numerele $p, q, r > 0$ şi şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ care verifică relaţia*

$$(pn+q)(a_{n+1}-a_n) = pa_n + r(pn+q+p)(pn+q),$$

$\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ *şi* $a_1 = (p+q)(r+1)$. *Să se calculeze* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{prn^2}\right)^n$.

Adrian Pop

Soluţie. Relaţia din ipoteză $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a_{n+1}(pn+q) - a_n(pn+q+p) = r(pn+q+p)(pn+q)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{a_{n+1}}{pn+q+p} - \frac{a_n}{pn+q} = r$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

Fie $b_n = \dfrac{a_n}{pn+q} \Rightarrow b_{n+1} - b_n = r$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow (b_n)_{n\geq 1}$ progresie aritmetică $\Rightarrow b_n = b_1 + (n-1)r = \dfrac{a_1}{p+q} + (n-1)r = r + 1 + (n-1)r = rn+1$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ $\Rightarrow a_n = (pn+q)(rn+1)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{prn^2}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(pn+q)(rn+1)}{prn^2}\right)^n$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1 + \frac{(p+qr)n+q}{prn^2}\right)^{\frac{prn^2}{(p+qr)n+q}}\right]^{\frac{(p+qr)n+q}{prn}}$$

$$= e^{\frac{p+qr}{pr}}.$$

Clasa a XII-a

1. *Fie $(A, +, \cdot)$ un inel cu proprietatea că dacă $x \cdot y = 1$, atunci $y \cdot x = 1$. Dacă $a, b \in A$ şi $a^2 \cdot (b^2+1) = b^2$, atunci:*

$$(a+1)\cdot b^2 \cdot a = a \cdot (a+1) \cdot b^2.$$

D. M. Bătineţu-Giurgiu

Soluţie. Avem:

$a^2b^2 = b^2 - a^2 \Leftrightarrow a^2b^2 - b^2 + a^2 - 1 = -1 \Leftrightarrow (a^2-1)(b^2+1) = -1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a-1)(a+1)(b^2+1) = -1 \Leftrightarrow (a+1)(b^2+1)(a-1) = -1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (ab^2 + a + b^2 + 1)(a-1) = -1 \Rightarrow ab^2a - ab^2 + b^2a - a^2b^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a+1)b^2a = a(a+1)b^2$ q.e.d.

2. *Dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie pară şi continuă pe $\mathbb{R}$ şi $a \in \mathbb{R}_+^*$, să se calculeze:*

$$\int_{-a}^{a} \frac{x^3\left(f(x)+x\right)}{x^2+1}\,dx.$$

D. M. Bătineţu-Giurgiu

Soluţie. Avem

$$I=\int_{-a}^{a}\frac{x^3(f(x)+x)}{x^2+1}\,dx=\int_{-a}^{a}\frac{x^3f(x)}{x^2+1}\,dx+\int_{-a}^{a}\frac{x^4}{x^2+1}\,dx.$$

Dacă $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\dfrac{x^3f(x)}{x^2+1}\Rightarrow g(-x)=\dfrac{-x^3f(-x)}{(-x)^2+1}=\dfrac{-x^3f(x)}{x^2+1}=-g(x)$, deci g este o funcţie impară şi atunci $\displaystyle\int_{-a}^{a}g(x)dx=0$. Prin urmare,

$$I=\int_{-a}^{a}\frac{x^4}{x^2+1}\,dx=2\int_{0}^{a}\frac{x^4}{x^2+1}\,dx$$

deoarece $\dfrac{x^4}{x^2+1}=\dfrac{(-x)^4}{(-x)^2+1}$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Deci

$$\begin{aligned}I&=2\int_0^a\frac{x^4-1+1}{x^2+1}\,dx=2\int_0^a(x^2-1)dx+2\int_0^a\frac{1}{x^2+1}\,dx\\&=2\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\int_0^a+2\operatorname{arctg}x\Big|_0^a\\&=2\left(\frac{a^3}{3}-a\right)+2\operatorname{arctg}a=\frac{2a}{3}(a^2-3)+2\operatorname{arctg}a.\end{aligned}$$

3. *a) Să se arate că există două funcţii primitivabile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ astfel încât funcţia $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h=\max\{f,g\}-\min\{f,g\}$ nu are primitive pe $\mathbb{R}$.*

b) Să se arate că există o infinitate de perechi $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, astfel încât funcţia $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h=a\cdot\max\{f,g\}+b\cdot\min\{f,g\}$ are primitive pe $\mathbb{R}$, unde $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sunt două funcţii primitivabile.

Gheorghe Boroica

Soluţie. a) Deoarece $\max\{a,b\}+\min\{a,b\}=a+b$, unde $a,b\in\mathbb{R}$, rezultă că

$$h=\max\{f,g\}-(f+g-\max\{a,b\})=2\max\{f,g\}-(f+g)=|f-g|.$$

Funcţiile $f(x)=\begin{cases}2\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ au primitive pe $\mathbb{R}$, dar $h(x)=\begin{cases}\left|\cos\dfrac{1}{x}\right|, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ nu are primitive pe $\mathbb{R}$.

b) Procedând ca şi la a), avem: $h=(a-b)\max\{f,g\}+b(f+g)$. Perechile (a,a), $a\in\mathbb{R}$, convin deoarece găsim $h=a(f+g)$ şi aceste funcţii au primitive pe $\mathbb{R}$.

4. *Fie ecuaţia* $x^5 + 4x - 14 = 0$, $x \in \mathbb{C}$ *şi* r *produsul părţilor reale ale rădăcinilor complexe nereale ale ecuaţiei date. Să se arate că* $r \in \left(0, \dfrac{28}{3}\right)$.

Gheorghe Boroica

Soluţie. Funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^5 + 4x - 14$ este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$, deci ecuaţia $f(x) = 0$ are cel mult o soluţie reală. Cum $f(2) > 0$ şi $f\left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{243}{32} - 8 < 0$, ecuaţia are o unică soluţie reală $x_1 \in \left(\dfrac{3}{2}, 2\right)$.

Fie $x_2 = a + b \cdot i$, $x_3 = \overline{x}_2$, $x_4 = c + d \cdot i$, $x_5 = \overline{x}_4$ celelalte rădăcini ale ecuaţiei. Atunci $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$ şi $r = a^2 \cdot c^2 > 0$, căci numerele de forma $\alpha \cdot i$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$, nu verifică ecuaţia.

Din $x_1x_2x_3x_4x_5 = 14 \Rightarrow x_2x_3x_4x_5 = \dfrac{14}{x_1} \in \left(7, \dfrac{28}{3}\right) \Leftrightarrow (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \in \left(7, \dfrac{28}{3}\right)$.

Deoarece $r = a^2c^2 < (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$, deducem că $r \in \left(0, \dfrac{28}{3}\right)$.

5. *Să se determine numărul soluţiilor* (x, y, z) *ale ecuaţiei* $x^4 + y^4 + z^8 + \hat{1} = \hat{0}$ *în corpul* $\mathbb{Z}_{17}$.

Dana Heuberger şi Marcel Ţena

Soluţie. Deoarece $\mathbb{Z}_{17}$ este un corp, pentru orice $\alpha \in \mathbb{Z}_{17}^*$ avem $\alpha^{16} = \hat{1}$ şi $\alpha^8 \in \{-\hat{1}, \hat{1}\}$. Aşadar polinomul $f = X^{16} - 1 = (X^4 - \hat{1})(X^4 + \hat{1})(X^8 + \hat{1})$ are ca rădăcini toate elementele din $\mathbb{Z}_{17}^*$. Mai mult, $f = (X^4 - \hat{1})(X^4 + \hat{1})(X^4 - \hat{4})(X^4 + \hat{4})$.
Fie mulţimile $A = \{x \in \mathbb{Z}_{17} | x^4 = \hat{1}\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z}_{17} | x^4 = -\hat{1}\}$, $C = \{x \in \mathbb{Z}_{17} | x^4 = \hat{4}\}$, $D = \{x \in \mathbb{Z}_{17} | x^4 = -\hat{4}\}$ şi $E = C \cup D = \{x \in \mathbb{Z}_{17} | x^8 = -\hat{1}\}$.
Mulţimile A, B, C şi D sunt disjuncte două câte două şi reuniunea lor este $\mathbb{Z}_{17}^*$. Notăm cu (1) ecuaţia din enunţ. Căutăm mai întâi soluţii cu $x, y, z \in \mathbb{Z}_{17}^*$.

I. $x^4 = \hat{1}$.
Dacă $y^4 \in \{\hat{1}, \hat{4}, -\hat{4}\}$, atunci (1) $\Leftrightarrow z^8 \in \{\hat{2}, \widehat{11}, \widehat{14}\}$, fals.
Dacă $y^4 = -\hat{1}$, atunci (1) $\Leftrightarrow z^8 + \hat{1} = \hat{0} \Leftrightarrow z \in E$.
Aşadar toate tripletele din $A \times B \times E$ sunt soluţii, în număr de $4 \cdot 4 \cdot 8 = 128$.

II. $x^4 = -\hat{1}$.
Dacă $y^4 = \hat{1}$, atunci (1) $\Leftrightarrow z^8 + \hat{1} = \hat{0} \Leftrightarrow z \in E$.
Aşadar toate tripletele din $B \times A \times E$ sunt soluţii, în număr de $4 \cdot 4 \cdot 8 = 128$.
Dacă $y^4 = -\hat{1}$, atunci (1) $\Leftrightarrow z^8 = \hat{1} \Leftrightarrow z \in A \cup B$.
Aşadar toate tripletele din $B \times B \times (A \cup B)$ sunt soluţii, în număr de $4 \times 4 \times 8 = 128$.
Dacă $y^4 \in \{\hat{4}, -\hat{4}\}$, atunci (1) $\Leftrightarrow z^8 \in \{-\hat{4}, \hat{4}\}$, fals.

III. $x^4 = \hat{4}$.
Dacă $y^4 \in \{\hat{1}, -\hat{1}, \hat{4}\}$, atunci (1) $\Leftrightarrow z^8 \in \{\hat{8}, \widehat{11}, \widehat{13}\}$, fals.

Dacă $y^4 = -\hat{4}$, atunci (1) $\Leftrightarrow z^8 + \hat{1} = \hat{0} \Leftrightarrow z \in E$.
Aşadar toate tripletele din $C \times D \times E$ sunt soluţii, în număr de $4 \times 4 \times 8 = 128$.

IV. $x^4 = -\hat{4}$.
Dacă $y^4 \in \{\hat{1}, -\hat{1}, -\hat{4}\}$, atunci (1) $\Leftrightarrow z^8 \in \{\hat{2}, \hat{4}, \hat{7}\}$, fals.
Dacă $y^4 = \hat{4}$, atunci (1) $\Leftrightarrow z^8 + \hat{1} = \hat{0} \Leftrightarrow z \in E$.
Aşadar toate tripletele din $D \times C \times E$ sunt soluţii, în număr de $4 \times 4 \times 8 = 128$.
Soluţiile cu cel puţin o componentă egală cu $\hat{0}$ sunt toate elementele mulţimilor $\{\hat{0}\} \times \{\hat{0}\} \times E$, $B \times \{\hat{0}\} \times \{\hat{0}\}$ şi $\{\hat{0}\} \times B \times \{\hat{0}\}$, în număr de 16.
în total, ecuaţia iniţială are $5 \cdot 128 + 16 = 656$ soluţii.

6. *Fie inelul integru $(A, +, \cdot)$, cu elementele neutre 0 şi 1. Notăm cu I mulţimea elementelor inversabile, cu N mulţimea elementelor neinversabile ale acestuia şi cu $N^* = N \backslash \{0\}$. Considerăm că inelul are proprietatea: $\forall x, y \in I$, $x + y \neq 0 \Rightarrow x + y \in I$. Dacă $a \in I \backslash \{-1\}$, să se arate că funcţia $f_a : N^* \to N^*$, $f_a(x) = x + a + ax$ este bine definită şi bijectivă.*

Dana Heuberger

Soluţie. Vom arăta mai întâi că

$$\forall \alpha \in I,\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \alpha + n \in \mathbb{N}^*. \qquad (1)$$

Într-adevăr, presupunem că $\alpha + n \in I$.
Cum $-\alpha \in I$, din ipoteză rezultă $n = (\alpha + n) + (-\alpha) \in I$, fals.
Evident, nu se poate să avem $\alpha = -n$, deci $\alpha + n \in \mathbb{N}^*$.
Apoi, pentru $a \in I \backslash \{-1\}$ şi $x \in \mathbb{N}^*$, din (1) obţinem că $a + x \in \mathbb{N}^*$.
Presupunem că $x + a + ax \in I$. Cum $-a \in I$ şi $x + a + ax - a = x(1 + a) \neq 0$ (inelul este integru), obţinem din ipoteză că $x(1 + a) \in I$. Tot din ipoteză avem că $a \in I$, deci $x \in I$, fals. Aşadar $x + a + ax \in \mathbb{N}$.
Mai mult, $x + a + ax = 0 \Leftrightarrow (a + 1)x = -a \Leftrightarrow x = -(a + 1)^{-1} \cdot a \in I$, fals, deci $x + a + ax \in \mathbb{N}^*$. În consecinţă, $f_a(\mathbb{N}^*) \subseteq \mathbb{N}^*$ şi funcţia este bine definită.

Fie $x, y \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $f_a(x) = f_a(y)$. Rezultă $(x - y)(a + 1) = 0$ şi cum $a + 1 \in I$, obţinem $x = y$. Aşadar funcţia este injectivă.

Pentru $y \in \mathbb{N}^*$, căutăm $x \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $f_a(x) = y$.
Obţinem $(a + 1)(x + 1) = y + 1$, deci $x = (a + 1)^{-1}(y + 1) - 1$. Deoarece $y \neq -1$, avem $y + 1 \in \mathbb{N}^*$, deci $(a + 1)^{-1}(y + 1) \in \mathbb{N}^*$ şi din (1) obţinem că $x \in \mathbb{N}^*$.
Aşadar funcţia este surjectivă, deci este şi bijectivă.

7. *Fie $D \subset \mathbb{R}$ un interval şi funcţia $f : D \to (0, \infty)$ derivabilă, cu derivata continuă.*

a) Să se calculeze $\displaystyle\int \frac{f(x) \cdot (2f'(x) + 1) + x \cdot (2 - f'(x))}{x^2 + f^2(x)}\, dx.$

b) Să se calculeze $\displaystyle\int \frac{\sin x + \sin 2x + 2x - x \cdot \cos x}{2x^2 + 1 - \cos 2x}\, dx,\ x \in (0, \pi).$

Ludovic Longaver

Soluţie. a)

$$\frac{f(x)\cdot(2\cdot f'(x)+1)+x\cdot(2-f'(x))}{x^2+f^2(x)}=\frac{2x+2f(x)\cdot f'(x)+f(x)-x\cdot f'(x)}{x^2+f^2(x)}$$

$$=\frac{2x+2f(x)\cdot f'(x)}{x^2+f^2(x)}+\frac{f(x)-x\cdot f'(x)}{x^2+f^2(x)}=\left(\ln(x^2+f^2(x))+\operatorname{arctg}\frac{x}{f(x)}\right)'\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int\frac{f(x)\cdot(2\cdot f'(x)+1)+x(2-f'(x))}{x^2+f^2(x)}\,dx=\ln(x^2+f^2(x))+\operatorname{arctg}\frac{x}{f(x)}+C.$$

b)

$$\int\frac{\sin x+\sin 2x+2x-x\cos x}{2x^2+1-\cos 2x}\,dx=\int\frac{\sin x(2\cos x+1)+x(2-\cos x)}{2x^2+1-\cos 2x}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{\sin x(2(\sin x)'+1)+x(2-(\sin x)')}{x^2+(\sin x)^2}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\left(\ln(x^2+\sin^2 x)+\operatorname{arctg}\frac{x}{\sin x}\right)+C.$$

8. *Să determine funcţia* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *care admite primitiva* $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *cu* $F(0)=0$, *astfel încât*

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)+F(x)\cdot\cos x=e^{\sin x}\,(2x\cdot\cos x+1)\,.$$

Nicolae Muşuroia

Soluţie. Avem:

$$F'(x)\cdot e^{\sin x}+F(x)(e^{\sin x})'=x(e^{2\sin x})'+x'\cdot e^{2\sin x},\ \forall\, x\in\mathbb{R},$$

adică $(F(x)\cdot e^{\sin x})'=(xe^{2\sin x})'$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$.
Obţinem

$$F(x)\cdot e^{\sin x}=xe^{2\sin x}+c,\ \forall\, x\in\mathbb{R}.$$

Pentru $x=0$ deducem $c=0$ şi $F(x)=xe^{\sin x}$.
Funcţia căutată este $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $f(x)=e^{\sin x}(x+\cos x)$.

9. *Fie* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^*$ *şi* $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *două funcţii care verifică relaţia:*

$$\forall\, x\in\mathbb{R},\ f\left(e^{\sin x}\right)+f\left(e^{\cos x}\right)=F\left(e^{\cos x}-e^{\sin x}\right).$$

Să se arate că F *nu poate fi o primitivă a lui* f.

Nicolae Muşuroia

Soluţie. Dacă F ar fi primitivă pentru f, atunci $F'(x)=f(x)\neq 0$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$, deci f are semn constant şi prin urmare F este injectivă.

Pentru $x=0\Rightarrow f(1)+f(e)=F(e-1)$

$x=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow f(e)+f(1)=F(1-e)$.

Deci $F(e-1)=F(1-c)\Rightarrow e-1=1-e$, (F).

10. *Fie $a > 1$. Să se calculeze*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^a \frac{x^{n+a}}{x^n + a} dx$$

Nicolae Muşuroia

Soluţie.

$$I_n = \int_0^a \frac{x^{n+a}}{x^n+a}\, dx = \int_0^1 \frac{x^{n+a}}{x^n+a}\, dx + \int_1^a \frac{x^{n+a}}{x^n+a}\, dx.$$

Din

$$0 \le \int_0^1 \frac{x^{n+a}}{x^n+a}\, dx \le \int_0^1 x^{n+a} dx = \frac{1}{n+a+1}$$

rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x^{n+a}}{x^n+a}\, dx = 0. \tag{1}$$

$$\int_1^a \frac{x^{n+a}}{x^n+a}\, dx = \int_1^a \frac{x^a(x^n+a) - ax^a}{x^n+a}\, dx$$

$$= \int_1^a x^a dx - a\int_1^a \frac{x^a}{x^n+a}\, dx = \frac{a^{a+1}-1}{a+1} - a\int_1^a \frac{x^a}{x^n+a}\, dx. \tag{2}$$

Cum $0 < \dfrac{x^a}{x^n+a} \le \dfrac{a^a}{x^n}$, $\forall\, x \in [1,a]$, deducem

$$0 \le \int_1^a \frac{x^n}{x^n+a}\, dx \le \frac{a^a}{n-1}\left(1 - \frac{1}{a^{n-1}}\right).$$

Trecând la limită, rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^a \frac{x^n}{x^n+a}\, dx = 0. \tag{3}$$

Din (1), (2) şi (3) rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \frac{a^{a+1}-1}{a+1}\,.$$

11. *Fie $p \in \mathbb{N}^*$ un număr fixat. Să se demonstreze că şirul $(x_n)_{n\ge1}$ astfel încât pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ avem*

$$x_n = \left((p+1)\cdot n \cdot \int_0^1 \frac{x^n}{1+x+\ldots+x^p}\; dx\right)^n$$

este mărginit.

Adrian Pop

Soluţie. Fie $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x+\cdots+x^p}dx$

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{1+x+\cdots+x^p}dx \leq 0 \Rightarrow \text{şirul } (I_n)_{n\geq 1} \text{ este descrescător.}$$

$$I_n + I_{n+1} + I_{n+2} + \cdots + I_{n+p} = \int_0^1 \frac{x^n(1+x+\cdots+x^p)}{1+x+\cdots+x^p}\,dx = \left.\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

Şirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este descrescător $\Rightarrow$

$$\Rightarrow I_{n+p} \leq I_{n+p-1} \leq \cdots \leq I_{n+1} \leq I_n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_n + I_{n+1} + I_{n+2} + \cdots + I_{n+p} \leq (p+1)I_n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(p+1)(n+1)} \leq I_n,\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \tag{1}$$

Din $I_{n+p} \leq I_{n+p-1} \leq \cdots \leq I_{n+1} \leq I_n \Rightarrow$

$$\Rightarrow I_n + I_{n+1} + I_{n+2} + \cdots + I_{n+p} \geq (p+1)I_{n+p} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_{n+p} \leq \frac{1}{(p+1)(n+1)} \overset{substituim\ n\ cu\ n-p}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow I_n \leq \frac{1}{(p+1)(n-p+1)}\ ,\ \forall\, n \geq p+1,\ n \in \mathbb{N}^*. \tag{2}$$

Din inegalităţile (1) şi (2)

$$\frac{n}{n+1} \leq (p+1)nI_n \leq \frac{n}{n-p+1}\ , \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ n \geq p+1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(1 - \frac{n}{n+1}\right)^n \leq x_n \leq \left(1 + \frac{p-1}{n-p+1}\right)^n,\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ n \geq p+1.$$

Dar $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{n}{n+1}\right)^n = e^{-1},\ \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{p-1}{n-p+1}\right)^n = e^{p-1}$, rezultă şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este mărginit.

12. *Să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ are loc inegalitatea:*

$$\frac{1}{1\cdot 3} - \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} - \ldots - \frac{1}{(4n-1)(4n+1)} < \frac{\pi-2}{4}$$

$$< \frac{1}{1\cdot 3} - \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} - \ldots - \frac{1}{(4n-1)(4n+1)} + \frac{1}{(4n+1)(4n+3)}$$

Adrian Pop

Soluţie. Se consideră funcţiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \operatorname{arctg} x - x + \frac{x^3}{3} \cdot \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{4n-1}}{4n-1},$$

$$g(x)=\operatorname{arctg}x-x+\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{4n-1}}{4n-1}-\frac{x^{4n+1}}{4n+1}.$$

$f'(x)=\dfrac{x^{4n}}{x^2+1}>0,\ \forall\, x\in\mathbb{R}^*\Rightarrow f$ strict crescătoare pe $\mathbb{R}\Rightarrow f(x)>f(0),\ \forall\, x>0\Rightarrow$

$$\Rightarrow \operatorname{arctg}x>x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots-\frac{x^{4n-1}}{4n-1},\ \forall\, x>0, \tag{1}$$

$g'(x)=\dfrac{-\,x^{4n+2}}{x^2+1}<0,\ \forall\, x\in\mathbb{R}^*\Rightarrow g$ strict descrescătoare pe $\mathbb{R}\Rightarrow g(x)<g(0)=0$, $\forall\, x>0\Rightarrow$

$$\Rightarrow \operatorname{arctg}x<x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots-\frac{x^{4n-1}}{4n-1}+\frac{x^{4n+1}}{4n+1}\,,\ \forall\, x>0. \tag{2}$$

Din relaţiile (1) şi (2) obţinem:

$$x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots-\frac{x^{4n-1}}{4n-1}<\operatorname{arctg}x<x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots$$
$$-\frac{x^{4n-1}}{4n-1}+\frac{x^{4n+1}}{4n+1}\,,\forall\, x>0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2-\frac{x^4}{3}+\frac{x^6}{5}-\cdots-\frac{x^{4n}}{4n-1}<x\cdot\operatorname{arctg}x<x^2-\frac{x^4}{3}+\frac{x^6}{5}-\ldots$$
$$-\frac{x^{4n}}{4n-1}+\frac{x^{4n+2}}{4n+1}\,,\forall\, x>0\overset{prin\ integrare\ pe\ [0,1]}{\Rightarrow}$$
$$\Rightarrow\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{3\cdot 5}+\frac{x^7}{5\cdot 7}-\cdots-\frac{x^{4n+1}}{(4n-1)(4n+1)}\right|\Bigg|_0^1<\int_0^1 x\cdot\operatorname{arctg}dx<$$
$$<\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{3\cdot 5}+\frac{x^7}{5\cdot 7}-\cdots-\frac{x^{4n+1}}{(4n-1)(4n+1)}+\frac{x^{4n+3}}{(4n+1)(4n+3)}\right)\Bigg|_0^1\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\frac{1}{1\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}-\cdots-\frac{1}{(4n-1)(4n+1)}<\frac{\pi-2}{4}<$$
$$<\frac{1}{1\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}-\cdots-\frac{1}{(4n-1)(4n+1)}+\frac{1}{(4n+1)(4n+3)}\ ,\ \forall\, n\in\mathbb{N}^*.$$

13. *Să se calculeze:*

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{1\le i<j\le n}\operatorname{arctg}\left(\frac{i}{n}\right)\operatorname{arctg}\left(\frac{j}{n}\right).$$

Daniel Sitaru, Leonard Giugiuc

Soluţie.

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n^2}\left[\left(\sum_{i=1}^{n}\operatorname{arctg}\frac{i}{n}\right)^2-\sum_{i=1}^{n}\operatorname{arctg}^2\left(\frac{i}{n}\right)\right]\\
&= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\operatorname{arctg}\frac{i}{n}\right)^2-\frac{1}{2n}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\operatorname{arctg}^2\left(\frac{i}{n}\right)\right)\right]\\
&= \frac{1}{2}\left(\int_0^1\operatorname{arctg}x\,dx\right)^2-\frac{1}{\infty}\cdot\int_0^1\operatorname{arctg}^2x\,dx\\
&= \frac{1}{2}\left(x\operatorname{arctg}x\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x}{1+x^2}\,dx\right)^2\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^1\right)^2\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\ln 2}{2}\right)^2.
\end{aligned}$$

14. *Să se arate că:*

$$\frac{\pi}{8}\le\int_0^1\operatorname{arctg}x\ dx\le\operatorname{arctg}\frac{1}{2}.$$

Daniel Sitaru, Leonard Giugiuc

Soluţie. Fie $f(x)=-\operatorname{arctg}x$; $f'(x)=\dfrac{-1}{1+x^2}$; $f''(x)=\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}>0\Rightarrow$
$\Rightarrow f$ convexă $\overset{Hermite-Hadamard}{\Longrightarrow}$

$$(1-0)\left(-\operatorname{arctg}\frac{1+0}{2}\right)\le-\int_0^1\operatorname{arctg}x\,dx$$

$$\le-(1-0)\frac{\operatorname{arctg}0+\operatorname{arctg}1}{2}-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\le-\int_0^1\operatorname{arctg}x\,dx\le-\frac{\frac{\pi}{4}}{2}$$

$$\frac{\pi}{8}\le\int_0^1\operatorname{arctg}x\,dx\le\operatorname{arctg}\frac{1}{2}.$$

15. *a) Fie $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ o funcţie continuă, strict crescătoare, cu $f(0)=0$. Dacă $a\in[0,\infty)$, $b\in Imf$, $\alpha\in\mathbb{R}_+^*\backslash\{1\}$, atunci:*

$$a^2b^2\le\frac{1}{1-\alpha}\left(\int_0^a f(x)\ dx\right)^2+\frac{1}{\alpha}\left(\int_0^b f^{-1}(y)\ dy\right)^2.$$

b) Să se arate că:

$$\frac{1}{1-e^2}\left(\int_0^1 e^{x^3}\ dx\right)^2+\frac{1}{e^2}\left(\int_0^1 \sqrt[3]{\ln y}\ dy\right)^2\geq 1.$$

Daniel Sitaru, Leonard Giugiuc

Soluţie.

$$\frac{1}{1-\alpha}\left(\int_0^a f(x)dx\right)^2+\frac{1}{\alpha}\left(\int_0^b f^{-1}(y)dy\right)^2\geq$$

$$\overset{Titu}{\geq}\frac{\left(\int_0^a f(x)dx+\int_0^b f^{-1}(y)dy\right)^2}{1-\alpha+\alpha}\overset{Young}{\geq}\frac{(ab)^2}{1}=a^2b^2.$$

Argument 18

Probleme propuse

Clasa a IX-a

1. Fie $m \in [1, \infty)$ şi $[ABCD]$ un tetraedru de arie totală $2s$. Dacă S_A este aria feţei opuse vârfului A, iar S_B, S_C, S_D sunt analoagele, să se arate că

$$\frac{S_A^m+S_B^m+S_C^m}{(s-S_D)^m}+\frac{S_B^m+S_C^m+S_D^m}{(s-S_A)^m}+\frac{S_C^m+S_D^m+S_A^m}{(s-S_B)^m}+\frac{S_D^m+S_A^m+S_B^m}{(s-S_C)^m}\geq 12.$$

D.M. Bătineţu-Giurgiu

2. Să se determine funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifică relaţia

$$f(f(x)+y^2f^2(y)) = x + f^4(y),\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}.$$

Florin Bojor

3. Se consideră şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_1 = \dfrac{1}{2}$ şi $x_{n+1} = x_n^2 + 2x_n$, $\forall\, n \geq 1$. Să se calculeze partea întreagă a numărului

$$a = \frac{1}{x_1+2}+\frac{2}{x_2+2}+\frac{2^2}{x_3+2}+\cdots+\frac{2^{n-1}}{x_n+2},\ \text{unde } n \in \mathbb{N}^*.$$

Florin Bojor

4. Se consideră hexagonul inscriptibil $ABCDEF$. Dacă $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{0}$, să se arate că perpendicularele din A, B, C, D, E, F pe CE, DF, AE, BF, AC, respectiv BD, sunt concurente.

Meda Bojor

5. Se consideră mulţimea $A = \{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca \mid a, b, c \in \mathbb{N}, a \neq b \neq c \neq a\}$. Să se arate că mulţimea conţine o infinitate de cuburi perfecte.

Gheorghe Boroica

6. Să se demonstreze că pentru orice numere strict pozitive x, y, z, t are loc inegalitatea

$$\sqrt[3]{x^2y^2z^2t^2(x^3+y^3)(y^3+z^3)(z^3+t^3)(x^3+y^3)(x^3+t^3)(x^3+z^3)}$$
$$\geq \sqrt{(x^3+yzt)(y^3+xzt)(z^3+xyt)(t^3+xyz)}.$$

Petru Braica

7. Să se arate că în şirul $(a_n)_{n\geq 1}$, definit prin $a_n = n^8 + (n+1)^8$, există o infinitate de numere compuse.

Costel Chiteş

8. Să se rezolve în $\mathbb{R}^*$ ecuaţia

$$\frac{1}{\sqrt{a^{1008}+b^{2016}}}+\frac{1}{\sqrt{b^{1008}+a^{2016}}}+\frac{1}{\sqrt{(ab)^{1008}+1}}$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{a^{504}}+\frac{1}{b^{504}}+\frac{1}{(ab)^{504}}\right).$$

Paul Cotan

9. Fie ABC şi punctele D, E, F astfel încât A este mijlocul lui (CF), B este mijlocul lui (AD) şi C este mijlocul lui (BE). Fie G centrul de greutate al $\triangle ABC$ şi M, N, P, X, Y, Z cu $\{M\} = DG \cap EF$, $\{N\} = EG \cap DF$, $\{P\} = FG \cap DE$, $\{X\} = AB \cap MC$, $\{Y\} = BC \cap NA$, $\{Z\} = AC \cap PB$.
Să se arate că:

a) $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$.

b) Triunghiurile ABC şi XYZ au acelaşi centru de greutate.

Dana Heuberger

10. Fie $x, y, z \in (0,1)$, cu $xyz = 1$. Să se arate că

$$\frac{x}{1+x^{n+1}}+\frac{y}{1+y^{n+1}}+\frac{z}{1+z^{n+1}}\leq\frac{2n}{n+1}.$$

Dana Heuberger şi Ioan Şerdean
Generalizare a problemei 27244, G.M. 6-7-8/2016

11. Fie x_1 şi x_2 soluţiile ecuaţiei $(2m+1)x^2-(m^2-1)x-m^2-2m-2=0$, $m \in \mathbb{R}$. Dacă x_1 şi x_2 sunt reale, să se demonstreze că ele au modulul mai mare sau egal cu 1.

Ludovic Longaver

12. Pe laturile triunghiului ABC considerăm, în această ordine, punctele $M, N \in (AB)$; $P, Q \in (BC)$; $R, S \in (AC)$ astfel încât $MN^2 + RS^2 = PQ^2$.
Dacă $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RS} = \overrightarrow{0}$, să se arate că triunghiul ABC este dreptunghic.

Nicolae Muşuroia

13. Demonstraţi că dacă $0 < a \leq b$, atunci

$$\left(\frac{2ab}{a+b}+\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\right)\left(\frac{a+b}{2ab}+\sqrt{\frac{2}{a^2+b^2}}\right)\leq\frac{(a+b)^2}{ab}.$$

Daniel Sitaru

14. Fie $a, b, c \in \mathbb{N}^*$. Arătaţi că cel puţin una dintre ecuaţiile:

$$x^2-6x(a-b)+\overline{ab}=\overline{ba},\ \ x^2-6x(b-c)+\overline{bc}=\overline{cb} \text{ şi } x^2-6x(c-a)+\overline{ca}=\overline{ac}$$

are soluţii reale.

Mihai Vijdeluc

În legătură cu problema S:L 15.201 din G.M. 9/2015

15. Fie $a, b, c > 0$ astfel încât $a^2+b^2+c^2=3$. Arătaţi că:

$$\frac{a^2+\sqrt{bc}}{a(b+c)}+\frac{b^2+\sqrt{ca}}{b(c+a)}+\frac{c^2+\sqrt{ab}}{c(a+b)}\geq\frac{9}{a+b+c}.$$

Mihai Vijdeluc

Clasa a X-a

1. Dacă $x, y, z \in \mathbb{R}_+^*$ şi $x+y+z=s$, atunci

$$\frac{1}{\sqrt{sx+yz}}+\frac{1}{\sqrt{sy+zx}}+\frac{1}{\sqrt{sz+xy}}\geq\frac{9}{2s}.$$

D.M. Bătineţu-Giurgiu

2. Dacă $(L_n)_{n\geq 0}$, $L_0=2$, $L_1=1$, $L_{n+2}=L_{n+1}+L_n$, $n\in\mathbb{N}$, este şirul lui Lucas, iar $p_n=\prod_{k=1}^{n}L_k$, atunci

$$\frac{1}{n\cdot p_n}\cdot\sum_{k=1}^{n}L_k^m+\frac{m\cdot n\sqrt[m]{p_n}}{L_{n+2}-3}>m+1,\ \forall m,n\in\mathbb{N}^*-\{1\}.$$

D.M. Bătineţu-Giurgiu

3. Dacă $x, y, z \in \mathbb{R}_+^*$, $m \in \mathbb{R}_+$, iar $A=\dfrac{x+y+z}{3}$, $G=\sqrt[3]{xyz}$, $H=\dfrac{3xyz}{xy+yz+zx}$, atunci:

$$\frac{x^{2m+2}}{(y+z+M)^{m+1}}+\frac{y^{2m+2}}{(z+x+M)^{m+1}}+\frac{z^{2m+2}}{(x+y+M)^{m+1}}\geq\frac{(x+y+z)^{m+1}}{3^{2m+1}},$$

unde $M\in\{A,G,H\}$.

D.M. Bătineţu-Giurgiu

4. Să se demonstreze că, pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}$, are loc inegalitatea:

$$(2^x + 2^y + 2^z)(4 - 2^{x-y} - 2^{y-z} - 2^{z-x}) \leq 3 \cdot 2^{\frac{x+y+z}{3}}.$$

Meda Bojor

5. Se consideră p şi q două numere prime distincte şi n un număr natural nenul. Să se determine numărul funcţiilor $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{p, q\}$, pentru care numărul $f(1) \cdot f(2) \ldots f(n)$ este cub perfect.

Gheorghe Boroica

6. Să se arate că dacă $a \in \mathbb{R}$, atunci cel puţin unul din numerele $a + \sqrt{2}$ şi $a^4 + \sqrt{2}$ este iraţional.

Gheorghe Boroica

7. Fie triunghiul ascuţitunghic ABC şi punctele $M \in AC$, $N \in AB$, $P \in BC$ astfel încât $MB \perp BC$, $NC \perp CA$, $PA \perp AB$. Să se arate că triunghiurile ABC şi MNP au acelaşi centru de greutate dacă şi numai dacă triunghiul ABC este echilateral.

Dana Heuberger

8. În exteriorul triunghiului ABC se construiesc triunghiurile $BMC \sim CNA \sim APB$. Fie $l = \dfrac{CM}{BC} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{BP}{AB}$.

a) Să se arate că $\triangle MNP \sim \triangle ABC \Leftrightarrow \triangle ABC$ este echilateral.

b) Să se arate că $\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{0}$.

Dana Heuberger

9. Demonstraţi că în orice triunghi ABC are loc inegalitatea

$$bc \cdot \cos^2 \frac{A}{2} + ca \cdot \cos^2 \frac{B}{2} + ab \cdot \cos^2 \frac{C}{2} \leq m_a^2 \cdot \frac{l_a}{h_a} + m_b^2 \cdot \frac{l_b}{h_b} + m_c^2 \cdot \frac{l_c}{h_c},$$

unde l_a, m_a şi h_a sunt lungimile bisectoarei, medianei şi respectiv a înălţimii din vârful A.

Vasile Ienuţaş şi Mihai Vijdeluc

10. Pe laturile hexagonului convex $ABCDEF$ se construiesc triunghiurile echilaterale ABM, CDN, EFP spre exterior şi BCS, DER, FAT spre interior. Să se arate că triunghiurile MNP şi SRT au acelaşi centru de greutate.

Nicolae Muşuroia

11. Să se arate că, dacă $w, z \in \mathbb{C}$ cu $|w| = r > 0$ şi $|z| = 1$, atunci:

$$|rz + w| + |z^2 + r| + |z^3 + w| \geq 2r.$$

Nicolae Muşuroia

12. Să se rezolve ecuaţia:

$$2^x + 3^x + 2 \cdot 4^x = 6^x + 7^x + x - 1.$$

Nicolae Muşuroia

13. Să se arate că

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 \geq \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 1} I_m(z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1),\ \forall\, z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C},\ \forall\, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Nicolae Muşuroia

14. *a*) Aduceţi la o formă mai simplă expresia:

$$1 + 2C_n^1 x + 3C_n^2 x^2 + \cdots + (n+1)C_n^n x^n;\ n \geq 1, x \in \mathbb{R}.$$

b) Arătaţi că:

$$1 + 2(n-1)C_n^1 + 3(n-1)^2 C_n^2 + \cdots + (n+1)(n-1)^n C_n^n = n^{n+1},\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$$

Ionel Tudor

15. Fie S aria triunghiului ABC şi a, b, c lungimile laturilor sale. Să se demonstreze că:

$$bc \cdot \cos\frac{A}{2} + ac \cdot \cos\frac{B}{2} + ab \cdot \cos\frac{C}{2} \geq 6S.$$

Mihai Vijdeluc

Clasa a XI-a

1. Dacă $(F_n)_{n\geq 0}$, $(L_N)_{n\geq 0}$, $F_0 = 0$, $L_0 = 2$, $F_1 = L_1 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, sunt respectiv şirurile lui Fibonacci şi Lucas, să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{L_n^2}\right)^{F_n^2}$.

D.M. Bătineţu-Giurgiu

2. Fie $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ o matrice neinversabilă. Dacă $\det(A^2 - 4 \cdot I_3) = -36$, demonstraţi că $\det(A - n \cdot I_3)$ este un număr întreg divizibil cu 6, pentru orice $n \in \mathbb{Z}$.

Florin Bojor

3. Se consideră şirul de numere reale $(x_n)_{n\geq 0}$, definit prin $x_0 > 0$ şi $x_{n+1} = \sqrt{\dfrac{x_n^3 + x_n}{x_n + 2}}$, $\forall\, n \geq 0$. Să se demonstreze că şirul este convergent şi calculaţi limita sa.

Meda Bojor

4. Să se arate că ecuaţia $\log_3 x - x^2 - x + 11 = 0$ are exact două soluţii reale x_1 şi x_2, iar $0 < x_1 \cdot x_2 < \dfrac{1}{3^9}$.

Gheorghe Boroica

5. Se consideră funcţia $f : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $f(X) = X^2 + 4X + 3I_3 - {}^tX$. Arătaţi că există o infinitate de perechi de matrice $(A, B) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ astfel încât $f(A) = f(B)$.

Gheorghe Boroica

6. Fie $n, m \in \mathbb{N}^*$, matricea inversabilă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ cu $\sum\limits_{i,j=1}^{n} |a_{i_j}^2| = 1$. Să se arate că $\det(A^m - I_n) \neq 0$.

Dana Heuberger

7. Fie $\sigma, \varepsilon \in S_n$. Să se arate că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\sqrt{\sigma(n)}}{\varepsilon(k)}$ este mărginit.

Dana Heuberger

8. Fie $k \in (1, \infty)$ şi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ o funcţie cu proprietatea că $\lim\limits_{x\to\infty} x^k f(x^{k-1}) = a \in \mathbb{R}$. Fie $a_n = f(1) + f(2) + \cdots + f(n)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se arate că $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

b) Să se arate că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ cu $x_n = \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, este convergent.

Dana Heuberger şi Cristian Heuberger

9. Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ cu $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{1 + n!n\, a_n}$, $n \geq 1$.

Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$.

Nicolae Muşuroia

10. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} a+1 & 2a & 5a \\ -a & -2a+1 & -5a \\ 2a & 4a & 10a+1 \end{pmatrix}$, unde $a \in \mathbb{R}$.

Să se calculeze A^n, $n \in \mathbb{N}^*$.

Adrian Pop

11. Demonstraţi că în orice triunghi ABC are loc relaţia:

$$\frac{1}{r^3}\sum a^3\cos B\cos C \geq 16\left(\sum \sin A\right)\left(\sum \cos^2 A\right).$$

Daniel Sitaru

12. Demonstraţi că, dacă $a, b, c \in \mathbb{R}$, atunci

$$\frac{a\cdot e^a + b\cdot e^b + c\cdot e^c + b}{e^a + e^b + e^c} \geq 1 + \ln 2.$$

Daniel Sitaru şi Leonard Giugiuc

13. Demonstraţi că, dacă $a, b, c \in (0, \infty)$, atunci

$$\Delta = \begin{vmatrix} s & \dfrac{a^2b}{a^3+b} & \dfrac{b^2c}{b^3+c} & \dfrac{c^2a}{c^3+a} \\ \dfrac{a^2b}{a^3+b} & s & \dfrac{c^2a}{c^3+a} & \dfrac{b^2c}{b^3+c} \\ \dfrac{b^2c}{b^3+c} & \dfrac{c^2a}{c^3+a} & s & \dfrac{a^2b}{a^3+b} \\ \dfrac{c^2a}{c^3+a} & \dfrac{b^2c}{b^3+c} & \dfrac{a^2b}{a^3+b} & s \end{vmatrix} > 0, \quad \text{unde } s = \frac{a+b+c}{2}.$$

Daniel Sitaru şi Leonard Giugiuc

14. Demonstraţi că, dacă $a, b, c \in [0, \infty)$, atunci

$$2(a+b+c)(a+2b+3c) \geq \left(\sqrt{b(a+b)} + 2\sqrt{c(b+c)} + \sqrt{a(a+c)}\right)^2.$$

Daniel Sitaru şi Leonard Giugiuc

15. Fie matricea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $\det(A + I_2) = \det(A + 2I_2)$. Să se arate că $3\det A = 2\det(A + I_2) + \det(A - I_2)$.

Mihai Vijdeluc

Clasa a XII-a

1. Fie $a, b, c, \alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât $b^2 < (a+c)^2$. Calculaţi

$$I = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{a\cdot x^{2n} + b\cdot x^n + c}{(x^2+1)\cdot[(a+c)x^{2n} + 2b\cdot x^n + (a+c)]}\,dx.$$

D.M. Bătineţu-Giurgiu şi Nicolae Muşuroia

2. Să se calculeze primitivele funcţiei $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{e^x(x^2-2x)-x}{(x+e^x)^2}$.

Florin Bojor

3. Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ o funcţie continuă care verifică relaţia $\displaystyle\int_x^1 f(t)dt\geq 2-x$, $\forall\, x\in[0,1]$. Să se demonstreze că $\displaystyle\int_0^1 f^2(x)dx\geq\frac{27}{4}$.

Florin Bojor

4. Să se determine mulţimea

$$A=\{\widehat{r}\in\mathbb{Z}_{168}\,|\,\exists\, a,n\in\mathbb{N}^*\ \text{ astfel încât }\ a=5^{25^n-1}\ \text{şi}\ \widehat{a}=\widehat{r}\}.$$

Gheorghe Boroica

5. a) Să se arate că există o infinitate de funcţii $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ astfel încât

$$\int_0^1 f^2(x)dx=\frac{1}{9}.$$

b) Să se arate că, dacă $f:[0,1]\to[0,\infty)$ este o funcţie continuă cu proprietatea că $\displaystyle\int_0^1 f^2(x)dx=\frac{1}{9}$, atunci există $a\in[0,1]$ astfel încât $f(a)=a^2$.

Gheorghe Boroica

6. Fie K un corp finit cu cel puţin 5 elemente. Să se arate că oricum am alege elementele distincte $a,b,c\in K\backslash\{0,1\}$, cel puţin unul dintre a,b,c,ab,ac,bc,abc este un cub perfect.

Dana Heuberger

7. Fie inelul $(A,+,\cdot)$. Dacă există $k\in\mathbb{N}^*$, astfel încât pentru orice $a,b\in A$ avem $(a+b)^{2k+1}=a^{2k}+b^{2k}$ şi $(a+b)^{2k+3}=a^{2k+2}+b^{2k+2}$, arătaţi că inelul este comutativ.

Dana Heuberger

8. Să se arate că nu există nici o funcţie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, derivabilă, pentru care

$$f'(f(x))\cdot f'(x)+x^2=0,\quad \text{pentru orice } x\in\mathbb{R}.$$

Ludovic Longaver

9. Să se calculeze $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\cos^2\dfrac{(kn+1)\pi}{4n^2}}$.

Ludovic Longaver

10. Să se calculeze $\displaystyle\int \frac{dx}{242\cdot x^5-(x-1)^5-(x+1)^5}$, $x\in\left(\frac{1}{2},\infty\right)$.

Ludovic Longaver

11. Să se arate că, dacă funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ verifică relaţia

$$f(x)+\sqrt[3]{f(x)}=x^3+x,\ \forall x\in\mathbb{R},$$

atunci f are primitive.

Nicolae Muşuroia

12. Fie $(G,\cdot)$ un grup pentru care există $m,n\in\mathbb{N}$, $m,n\geq 2$, astfel încât $x^my^n=yx$, $\forall x,y\in G$. Să se arate că grupul G este abelian.

Nicolae Muşuroia

13. Se consideră funcţia $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ derivabilă cu f' continuă pe $[0,1]$ şi cu proprietatea că, pentru orice $\alpha,\beta\in[0,1]$ cu $\alpha<\beta$, există $x,y\in[\alpha,\beta]$ astfel încât $xf'(x)+yf'(y)=2b$. Să se arate că $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx=a-b$, unde $a=f(1)$.

Nicolae Muşuroia

14. Se consideră $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$ şi $f:[0,1]\to[a,b]$ o funcţie integrabilă astfel încât $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx=0$ şi $\displaystyle\int_0^1 f^2(x)dx=1$. Să se arate că $\displaystyle\int_0^1 f^3(x)dx\leq a^2b+2a+b$.

Daniel Sitaru

15. Arătaţi că, dacă $a,b,c\in[0,\infty)$, atunci:

$$25\sum a^2\cdot\sqrt[5]{a}+11\sum ab^6\geq 33\sum a^2b.$$

Daniel Sitaru

Erată

• Problemele 1 şi 3 clasa a IX-a şi problemele 1 şi 4 clasa a XI-a, de la Concursul Argument 2014, sunt semnate de conf. univ. dr. Mircea Rus.

• La problema 11, clasa a X-a, în loc de $g(x) = 2 + \sin(x-2)$ se va scrie $g(x) = x - \sin^2(x-2)$.

Argument 18

Sumar