Clasa IX

1. O lăcustă face salturi, fiecare salt în linie dreaptă şi de două ori mai lung ca precedentul. Poate vreodată lăcusta să revină în punctul de plecare iniţial?

Soluţie. Răspunsul este negativ. Dacă prin absurd ar putea reveni în poziţia iniţială atunci lăcusta a parcurs o linie poligonală închisă în care laturile consecutive sunt în proporţia 2 : 1. Orice segment al unei astfel de linii are lungimea mai mică decât suma celorlalte (justificare!). Segmentul cel mai lung este ultimul, de mărime $2^{n-1} \cdot l_1$ iar suma celorlalte este $l_1 + 2l_1 + 2^2 l_1 + ... + 2^{n-2} l_1 = \left(2^{n-1} - 1\right) l_1 < 2^{n-1} l_1$.

Soluţie vectorială. Fie $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, ..., \overrightarrow{v_n}$ vectorii salturilor, unde

$|\overrightarrow{v_2}| = 2 \cdot |\overrightarrow{v_1}|, \; |\overrightarrow{v_3}| = 2 \cdot |\overrightarrow{v_2}|, ..., |\overrightarrow{v_n}| = 2 \cdot |\overrightarrow{v_{n-1}}|$.

Dacă prin absurd $\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} + ... + \overrightarrow{v_n} = \overrightarrow{0}$

atunci $\overrightarrow{v_n} = -\left(\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} + ... + \overrightarrow{v_{n-1}}\right)$ şi $|\overrightarrow{v_n}| = |\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} + ... + \overrightarrow{v_{n-1}}| \Leftrightarrow 2^{n-1} |\overrightarrow{v_1}| = |\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} + ... + \overrightarrow{v_{n-1}}| \leqslant |\overrightarrow{v_1}| + |\overrightarrow{v_2}| + ... + |\overrightarrow{v_{n-1}}| = \left(1 + 2 + ... + 2^{n-1}\right) |\overrightarrow{v_1}| = \left(2^{n-1} - 1\right) |\overrightarrow{v_1}|$ şi obţinem contradicţia

$2^{n-1} \leq 2^{n-1} - 1$.

2. Să se determine numerele reale x cu proprietatea că trei dintre numerele

$$a = x + \sqrt{3}, \; b = x + \frac{1}{x}, \; c = x^2 + 4\sqrt{3}, \; d = x - \frac{1}{x}$$

sunt numere întregi.

Vasile Pop

Soluţie. Dacă b şi d ar fi întregi, atunci $2x \in \mathbb{Z}$ şi $\dfrac{2}{x} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 2x \in \mathbb{Z}$ şi $\dfrac{4}{2x} \in \mathbb{Z}$ $\Leftrightarrow 2x \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4\} \Leftrightarrow x \in \left\{\pm\dfrac{1}{2}, \pm 1, \pm 2\right\}$. Pentru $x = \pm\dfrac{1}{2}$ şi $x = \pm 2$ rezultă că $b \notin \mathbb{Z}$ şi $d \notin \mathbb{Z}$ şi rămâne doar cazul $x = \pm 1$, caz în care celelalte două numere a şi c nu sunt întregi, deci în nici unul din aceste cazuri nu avem trei numere întregi.

Rămâne doar şansa ca doar unul dintre b şi d să fie întreg iar a şi c să fie ambele întregi. Din $a_1 \in \mathbb{Z}$ rezultă $a^2 - c \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 2\sqrt{3}(x-2) \in \mathbb{Z}$, rezultă $x - 2 = k\sqrt{3}$ cu $k \in \mathbb{Z}$, deci $x = 2 + k\sqrt{3}$ şi revenind la $c \in \mathbb{Z}$ obţinem:

$$4 + 4k\sqrt{3} + 3k^2 + 4\sqrt{3} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 4\sqrt{3}(k+1) \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow k = -1 \text{ şi } x = 2 - \sqrt{3}.$$

Singura valoare este $x = 2 - \sqrt{3}$ pentru care numerele $a = 2$, $b = 4$, $c = 7$ sunt întregi şi $d = 2\sqrt{3}$ nu este întreg.

3. Fie a, b, c, d numere reale care verifică relaţiile:

$$ab + cd = 14,\ ac + bd = 11,\ ad + bc = 10,\ abcd = 24.$$

Să se determine cea mai mare valoare pe care o poate lua a.

Vasile Pop

Soluţie. Observăm că dacă (a, b, c, d) este o soluţie atunci $(-a, -b, -c, -d)$ este soluţie şi atunci valoarea maximă a lui a este pozitivă.

Pe de altă parte, din $ab + cd = 14$ şi $(ab) \cdot (cd) = 24$ rezultă că ab şi cd sunt rădăcinile ecuaţiei de gradul doi

$$x^2 - 14x + 24 = 0,$$

adică 2 şi 12, deci $\{ab, cd\} = \{2, 12\}$.

Analog din $ac+bd = 11$ şi $(ac)\cdot(bd) = 24$ rezultă $\{ac, bd\} = \{3, 8\}$ şi din $ad+bc = 10$, $(ad) \cdot (bc) = 24$ rezultă $\{ad, bc\} = \{4, 6\}$.

Pe de altă parte avem

$$a^2 = \frac{(ab) \cdot (ac) \cdot (ad)}{abcd} = \frac{(ab) \cdot (ac) \cdot (ad)}{24}$$

şi atunci

$$\max(a^2) = \frac{\max(ab) \cdot (ac) \cdot (ad)}{24} = \frac{12 \cdot 8 \cdot 6}{24} = 24$$

deci $\max a = \sqrt{24}$ şi în acest caz avem $ab = 12$, $ac = 8$, $ad = 6$, $cd = 2$, $bd = 3$, $bc = 4$.

Obţinem

$$b^2 = \frac{(ba) \cdot (bc) \cdot (bd)}{abcd} = \frac{12 \cdot 4 \cdot 3}{24} = 6$$
$$c^2 = \frac{(ca) \cdot (cb) \cdot (cd)}{abcd} = \frac{8 \cdot 4 \cdot 2}{24} = \frac{8}{3}$$
$$d^2 = \frac{(da) \cdot (db) \cdot (dc)}{abcd} = \frac{6 \cdot 3 \cdot 2}{24} = \frac{3}{2}$$

O soluţie pentru care a este maxim este

$$a = 2\sqrt{6},\ b = \sqrt{6},\ c = \frac{4}{\sqrt{6}},\ d = \frac{3}{\sqrt{6}}.$$

4.Fie ABC un triunghi cu înălţimile AA', BB', CC'. Să se arate că dacă

$$9\overrightarrow{AA'} + 13\overrightarrow{BB'} + 16\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{0}$$

atunci unul dintre unghiurile triunghiului este de 60°.

Vasile Pop

Soluţie. Notăm $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{h_A} = \overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{h_B} = \overrightarrow{BB'}$ şi $\overrightarrow{h_C} = \overrightarrow{CC'}$.

Deoarece vectorii $\overrightarrow{a'} = 9\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{b'} = 13\overrightarrow{BB'}$ şi $\overrightarrow{c'} = 16\overrightarrow{CC'}$ au suma $\overrightarrow{a'} + \overrightarrow{b'} + \overrightarrow{c'} = \overrightarrow{0}$ şi sunt respectiv ortogonali pe $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ atunci cu vectorii $\overrightarrow{a'}$, $\overrightarrow{b'}$, $\overrightarrow{c'}$ se poate construi un triunghi asemenea cu triunghiul dat şi cu laturile $9h_A$, $13h_B$, $16h_C$ adică

$$\frac{9h_A}{a} = \frac{13h_B}{b} = \frac{16h_C}{c} \Leftrightarrow \frac{9 \cdot 25}{a^2} = \frac{13 \cdot 25}{b^2} = \frac{16 \cdot 25}{c^2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{\sqrt{13}} = \frac{c}{4}$$

şi atunci

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{3^2 + 4^2 - \left(\sqrt{13}\right)^2}{2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{1}{2},$$

deci $\widehat{B} = 60^\circ$.

Clasa X

1. Fie ABC un triunghi dreptunghic cu laturile $a > b > c$. Să se determine toate triunghiurile dreptunghice $A'B'C'$ cu laturile $a' > b' > c'$ astfel ca triunghiul cu laturile $a + a'$, $b + b'$, $c + c'$ să fie dreptunghic.

Vasile Pop

Soluţie. Avem relaţiile:

$$a^2 = b^2 + c^2,\ a'^2 = b'^2 + c'^2,$$

$$(a + a')^2 = (b + b')^2 + (c + c')^2 \Leftrightarrow aa' = bb' + cc'.$$

Ultima relaţie se scrie:

$$a \cdot a' = a \sin B \cdot a' \sin B' + a \cos B \cdot a' \cos B' \Leftrightarrow$$

$$\sin B \sin B' + \cos B \cos B' = 1 \Leftrightarrow$$

$$\cos(B - B') = 1 \Leftrightarrow B = B'.$$

În concluzie triunghiurile ABC şi $A'B'C'$ sunt asemenea:

$$a' = ka,\ b' = kb,\ c' = kc$$

şi evident

$$(a + a')^2 = (b + b')^2 + (c + c')^2.$$

Răspuns: Toate triunghiurile asemenea cu triunghiul ABC.

Observaţie. În general triunghiul cu laturile $a + a'$, $b + b'$ şi $c + c'$ este obtuzunghic $((a + a')^2 \geq (b + b')^2 + (c + c')^2)$.

2. Fie x, y numere reale cu proprietatea:

$$x = y + \cfrac{1}{x + \cfrac{1}{y + \cfrac{1}{x + \cfrac{1}{\ddots}}}}; \quad y = x - \cfrac{1}{y + \cfrac{1}{x - \cfrac{1}{y + \cfrac{1}{\ddots}}}}$$

(în ambele expresii apar o infinitate de fracţii).

Să se arate că $x \cdot y = 1$.

Vasile Pop

Soluţie. Se observă relaţiile:

$$x = y + \cfrac{1}{x + \cfrac{1}{x}} \tag{1}$$

şi

$$y = x - \cfrac{1}{y + \cfrac{1}{y}} \tag{2}$$

sau

$$x - y = \frac{x}{x^2+1} \quad \text{şi} \quad y - x = -\frac{y}{y^2+1}.$$

Adunând ultimele relaţii obţinem:

$$\frac{x}{x^2+1} = \frac{y}{y^2+1} \Leftrightarrow \frac{x^2+1}{x} = \frac{y^2+1}{y} \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = y + \frac{1}{y} \Leftrightarrow$$

$$x - y = \frac{1}{y} - \frac{1}{x} \Leftrightarrow x - y = \frac{x-y}{xy} \Leftrightarrow (x-y)(xy-1) = 0.$$

Din prima relaţie $x - y \neq 0$ deci $xy = 1$.

Observaţie. Înlocuind x cu $\frac{1}{y}$ şi y cu $\frac{1}{x}$ în (2) şi (1) obţinem:

$$x - \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+1} \quad \text{şi} \quad y - \frac{1}{y} = -\frac{y}{y^2+1} \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^2-1}{x} = \frac{x}{x^2+1} \quad \text{şi} \quad \frac{y^2-1}{y} = -\frac{y}{y^2+1} \Leftrightarrow$$

$$x^4 - 1 = x^2 \quad \text{şi} \quad y^4 - 1 = -y^2 \Leftrightarrow$$

$$x^4 - x^2 - 1 = 0 \quad \text{şi} \quad y^4 + y^2 - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$x^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{şi} \quad y^2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow$$

$$(x,y) \in \left\{ \left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}, \sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} \right), \left(-\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}, -\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} \right) \right\}.$$

3. a) Să se arate că pentru orice număr natural impar n nu există funcţii $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifică ecuaţia:

$$f(f(x+y) - f(x-y)) = x^n y^n, \ \forall\, x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

b) Există numere naturale nenule n pentru care ecuaţia (1) are soluţii?

Vasile Pop

Soluţie. a) Presupunem prin absurd că ecuaţia (1) are soluţie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pentru n impar.

Pentru $x = y = 0$ obţinem $f(0) = 0$.

Pentru $y = 1$ obţinem $f(f(x+1) - f(x-1)) = x^n$, $x \in \mathbb{R}$ şi cum funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^n$, este surjectivă pentru n impar, rezultă că funcţia f este surjectivă.

Acum pentru $x = y$ din (1) obţinem:

$$f(f(2x)) = x^{2n}, \ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Deoarece f este surjectivă, pentru orice $t \in \mathbb{R}$ există $x \in \mathbb{R}$ astfel ca $f(2x) = t$ şi atunci $f(t) = x^{2n} \geq 0$, deci în contradicţie cu surjectivitatea rezultă că $f(t) \geq 0$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$.

b) Pentru $n = 2$, funcţia

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{16}} \cdot x^2, \ x \in \mathbb{R}$$

verifică ecuaţia (1). (Se caută soluţie de forma $f(x) = ax^2$, $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$).

4. Se consideră o progresie aritmetică de numere reale $(a_n)_{n\geq 1}$ cu proprietatea că a_1^2, a_2^2 şi a_{2015}^2 sunt termeni ai progresiei. Să se arate că toţi termenii progresiei sunt numere întregi.

Vasile Pop

Soluţie. Fie $a_n = a + (n-1)r$, $\forall n \geq 1$.

Conform ipotezei există numerele naturale n_1, n_2, n_3 astfel ca:

$$a^2 = a + n_1 r \tag{1}$$

$$(a+r)^2 = a + n_2 r \tag{2}$$

$$(a+kr)^2 = a + n_3 r \tag{3}$$

$(k = 2014)$

Scăzând din (2) şi (3) pe (1) obţinem (pentru $r \neq 0$) sistemul:

$$2a + r = n_2 - n_1 \tag{3}$$

$$2ak + k^2 r = n_3 - n_1 \tag{4}$$

care are soluţiile $a, r \in \mathbb{Q}$ (se pot exprima).

Revenind în (1) obţinem:

$$a^2 = a + n_1 r \Leftrightarrow a^2 - a(1 - 2n_1) - n_1(2a + r) = 0 \Leftrightarrow$$

$$a^2 - a(r - 2n_1) - n_1(n_2 - n_1) = 0,$$

care este o ecuaţie de gradul doi cu soluţia $a \in \mathbb{Q}$.

Deoarece coeficientul lui a^2 este 1 rezultă $a \in \mathbb{Z}$. Acum din (3) rezultă $r \in \mathbb{Z}$ şi apoi $a_n \in \mathbb{Z}$, $\forall n \geq 1$. Dacă $r = 0$ atunci $a_n = 0$, $\forall n \geq 1$ sau $a_n = 1$, $\forall n \geq 1$, deci $a_n \in \mathbb{Z}$, $\forall n \geq 1$.

Clasa XI

1. Să se determine numărul secvenţelor $(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{16})$ de numere naturale având proprietăţile

$$x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{16}$$

$$x_{16} = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 4^4 \cdot 5^5$$

şi astfel încât $\dfrac{x_{k+1}}{x_k}$ să fie număr prim pentru orice $k = 0, 1, 2, \ldots, 15$.

Vasile Pop

Soluţie. $x_{16} = 2^{10} \cdot 3^3 \cdot 5^5$, deci x_{16} are doar trei divizori numere prime: $2, 3, 5$ şi din $\frac{x_{k+1}}{x_k} \in \mathbb{N}$ rezultă că toate numerele $x_1, x_2, ..., x_{16}$ au doar pe 2, pe 3 sau pe 5 ca divizori primi.

Avem $\frac{x_{16}}{x_0} = \frac{x_1}{x_0} \cdot \frac{x_2}{x_1} \cdot ... \cdot \frac{x_{16}}{x_{15}} = y_1 \cdot y_2 \cdot ... \cdot y_{16}$, unde $y_k = \frac{x_k}{x_{k-1}}, k = \overline{1, 16}$ este număr prim.

Atunci $\underbrace{y_1 \cdot y_2 \cdot ... \cdot y_{15} \cdot y_{16}}_{produs\, de\ 16\ numere\, prime} = \underbrace{2^{10} \cdot 3^3 \cdot 5^5}_{18 factori\ primi} \frac{1}{x_0}$, deci $x_0 \in \{4, 6, 9, 10, 15, 25\}$.

Analizăm cazurile:

1. $x_0 = 4 \Rightarrow y_1 \cdot y_2 \cdot ... \cdot y_{16} = 2^8 \cdot 3^5 \cdot 5^5$, deci sunt $C_{16}^8 \cdot C_8^1$ secvenţe;
2. $x_0 = 6 \Rightarrow y_1 \cdot y_2 \cdot ... \cdot y_{16} = 2^9 \cdot 3^2 \cdot 5^5$, deci sunt $C_{16}^9 \cdot C_8^2$ secvenţe;
3. $x_0 = 10 \Rightarrow y_1 \cdot y_2 \cdot ... \cdot y_{16} = 2^9 \cdot 3^3 \cdot 5^4$, deci sunt $C_{16}^9 \cdot C_8^3$ secvenţe;
4. $x_0 = 15 \Rightarrow y_1 \cdot y_2 \cdot ... \cdot y_{16} = 2^{10} \cdot 3^2 \cdot 5^4$, deci sunt $C_{16}^{10} \cdot C_8^2$ secvenţe;
5. $x_0 = 25 \Rightarrow y_1 \cdot y_2 \cdot ... \cdot y_{16} = 2^{10} \cdot 3^3 \cdot 5^3$, deci sunt $C_{16}^{10} \cdot C_8^3$ secvenţe;

Numărul cerut este egal cu $C_{16}^{10} \cdot C_8^1 + C_{16}^9 \cdot C_8^2 + C_{16}^9 \cdot C_8^3 + C_{16}^{10} \cdot C_8^2 + C_{16}^{10} \cdot C_8^3$.

2. Fie a un număr natural nenul şi funcţia

$$f_a : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*,\ f_a(n) = an + (a, n) + [a, n],\ \forall\ n \geq 1.$$

a) Să se arate că funcţia f_a este injectivă pentru orice $a \in \mathbb{N}^*$.

b) Să se arate că $f_a(n) \neq 100$ pentru orice $a \in \mathbb{N}^*$ şi orice $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Să se determine valorile lui a pentru care există $nin\mathbb{N}^*$ astfel ca

$$f_a(n) = 99.$$

Vasile Pop

Soluţie. a) Deoarece $(a, n) \mid f_a(n)$ şi $(a, n) \mid a$ rezultă $(a, f_a(n)) = (a, n)$.

Din relaţia $f_a(n) = f_a(m)$ rezultă $(a, n) = (a, m)$ şi atunci

$$f_a(n) = f_a(m) \Leftrightarrow an + \frac{an}{(a,n)} = am + \frac{am}{(a,m)} \Leftrightarrow$$

$$an\left(1 + \frac{1}{(a,n)}\right) = a_m\left(1 + \frac{1}{(a,m)}\right) \Leftrightarrow an = am \Leftrightarrow m = n,$$

deci funcţia f_a este injectivă.

b) Dacă prin absurd $f_a(n) = 100$ atunci

$$(a,n)[a,n] + (a,n) + [a,n] = 100 \Leftrightarrow$$

$$((a,n)+1)([a,n]+1) = 101 \tag{1}$$

Deoarece 101 este număr prim şi $(a, n)+1 \geq 2$, $[a, n]+1 \geq 2$, relaţia (1) este imposibilă.

c) Dacă $f_a(n) = 99$ atunci $(a, n) \mid 99$, deci

$$(a,n) \in \{1, 3, 9, 11, 33, 99\}.$$

Avem

$$f_a(n) = 99 \Leftrightarrow ((a,n)+1)([a,n]+1) = 100$$

din care rezultă cazurile:

1) $(a, n) = 1,\ [a, n] = 49,\ an = 49$, din care obţinem:

$a = 1$, $n = 49$;

$a = 7$, $n = 7$ care nu este soluţie;

$a = 49$, $n = 1$.

2) $(a, n) = 3,\ [a, n] = 24,\ an = 72 = 3^2 \cdot 2^3$ care dă

$a = 3,\ n = 24$;

$a = 24,\ n = 3$.

3) $(a, n) = 9,\ [a, n] = 9 \Rightarrow a = n = 9$.

4) În cazurile $(a, n) = 11$, $(a, n) = 33$, $(a, n) = 99$ nu obţinem soluţii.

Rămân valorile lui a găsite:

$$a \in \{1, 3, 9, 24, 49\}.$$

3. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Să se determine matricele $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}_+)$ cu proprietatea că $A \cdot A^T = I_n$.

Vasile Pop

Soluţie. Elementele matricei $B = A \cdot A^t$ sunt $b_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot a_{jk}$ şi din condiţia $B = I_n$ rezultă: (1) $\sum\limits_{k=1}^{n} (a_{ik})^2 = 1$ şi (2) $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot a_{jk} = 0, \forall i \neq j$.
Din Prima condiţie rezultă că pe orice linie avem cel puţin un element nenul, în total în matrice apar cel puţin n elemente nenule.
Din condiţia (2) (deoarece $a_{ij} \geqslant 0$ şi $a_{ji} \geqslant 0$) rezultă că fiecare coloană are cel mult un element nenul deci în total în matrice apar cel mult n elemente nenule.
În concluzie numărul elementelor nenule este exact n şi sunt repartizate câte unul pe fiecare linie şi pe fiecare colană, astfel că orice matrice A se obţine din matricea unitate făcând o permutare a liniilor (sau a colanelor).

4. a). Să se determine mulţimea $X_0 \subseteq \mathbb{R}$ pentru care putem defini şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ prin relaţia de recurenţă

$$x_{n+1} = \frac{1}{x_n + 1}, \quad \text{pentru orice } n \geq 0,$$

unde $x_0 \in X_0$.

b). Să se studieze monotonia şi mărginirea şirului $(x_n)_{n\geq 0}$ definit la punctul a), în funcţie de $x_0 \in X_0$.

Vasile Pop

Soluţie.

a) Sirul este definit prin recurenţa omografică $x_{n+1} = f(x_n)\,; f(x) = \frac{1}{x+1}$, deci $x_n = f^n(x_0)$. Asociem funcţiei $f(x) = \frac{0\cdot x+1}{1\cdot x+1}$ matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ care verifică relaţia $A^2 = A + I_2$ sau $A^{n+1} = A^n + A^{n-1}$.
Prin inducţie obţinem că $A^n = \begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix}$, deci $x_n = \frac{F_{n-1}x_0+F_n}{F_n x_0+F_{n+1}}$ cu condiţia $x_0 \neq -\frac{F_{n+1}}{F_n}$ şi atunci $X_0 = \mathbb{R}\backslash \left\{ -\frac{F_{n+1}}{F_n} \,|n \in \mathbb{N} \right\}$, unde $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este şirul lui Fibonacci: $F_0 = F_1 = 1,\ F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$.
b) Şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este mărginit pentru orice $x_0 \in X_0$, constant pentru $x_0 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ şi nemonoton pentru $x_0 \in X_0\backslash \left\{ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right\}$.

Clasa XII

1. Să se determine funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care admit primitivă $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ si verifică relaţia:

$$f(x-y) = \frac{F(x)}{F(y)},\ \forall\ x, y \in \mathbb{R}.$$

Vasile Pop

Soluţie. În mod necesar $f(y) \neq 0$, $\forall\ y \in \mathbb{R}$ deci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$.
Pentru $x = y$ obţinem

$$f(0) = 1.$$

Pentru $y = 0$ obţinem relaţia

$$f'(x) - \frac{1}{F(0)} \cdot f(x) = 0,\ \forall\ x \in \mathbb{R}.$$

Înmulţind ultima ecuaţie cu $e^{-\frac{1}{F(0)}x}$ obţinem:

$$\left(f(x)e^{-\frac{1}{F(0)}x}\right)' = 0,\ \forall\ x \in \mathbb{R}$$

deci

$$f(x) = ce^{\frac{1}{F(0)}x},\ x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}^*.$$

Din $f(0) = 1$ obţinem:

$$c = 1$$

deci

$$f(x) = e^{\frac{1}{F(0)}x} = e^{ax},\ x \in \mathbb{R}$$

$$a = \frac{1}{F(0)} \in \mathbb{R}^*.$$

Reciproc: Dacă $f(x) = e^{ax}$, $x \in \mathbb{R}$ atunci

$$F(x) = \frac{1}{a}e^{ax} + c$$

şi relaţia din ipoteză devine

$$e^{a(x-y)} = \frac{e^{ax} + c}{e^{ay} + c}$$

care pentru $c = 0$ este adevărată pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

2. Să se determine numărul matricelor $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_p)$ cu proprietatea $A^2 = I_2$, unde p este un număr prim.

Soluţie. Fie $A = \begin{pmatrix} \widehat{a} & \widehat{b} \\ \widehat{c} & \widehat{d} \end{pmatrix}$. Din relaţia $A^2 = I_2$ obţinem sistemul

$$\widehat{a}^2 + \widehat{b}\widehat{c} = \widehat{1},\ \widehat{b}(\widehat{a} + \widehat{d}) = \widehat{0},\ \widehat{c}(\widehat{a} + \widehat{d}) = \widehat{0},\ \widehat{d}^2 + \widehat{b}\widehat{c} = \widehat{1}$$

sau echivalent

$$\widehat{a}^2 + \widehat{b}\widehat{c} = \widehat{1},\ \widehat{b}(\widehat{a} + \widehat{d}) = \widehat{0},\ \widehat{c}(\widehat{a} + \widehat{d}) = \widehat{0},\ (\widehat{a} - \widehat{d})(\widehat{a} + \widehat{d}) = \widehat{0}.$$

Deoarece p este număr prim, din relaţia $\widehat{x} \cdot \widehat{y} = \widehat{0}$ rezultă $\widehat{x} = \widehat{0}$ sau $\widehat{y} = \widehat{0}$ ($p | x \cdot y \Rightarrow p | x$ sau $p | y$).

Avem cazurile:

1) $\widehat{a} + \widehat{d} \neq \widehat{0}$, din care rezultă $\widehat{b} = \widehat{c} = \widehat{0}$, $\widehat{a} = \widehat{d}$ şi din $\widehat{a}^2 = \widehat{1} \Leftrightarrow (\widehat{a} - \widehat{1})(\widehat{a} + \widehat{1}) = \widehat{0}$ rezultă $\widehat{a} = \widehat{1}$ sau $\widehat{a} = \widehat{p-1}$.

Am obţinut două matrice

$$A_1 = \begin{pmatrix} \widehat{1} & \widehat{0} \\ \widehat{0} & \widehat{1} \end{pmatrix} = I_2 \quad \text{şi} \quad A_2 = \begin{pmatrix} \widehat{p-1} & \widehat{0} \\ \widehat{0} & \widehat{p-1} \end{pmatrix}.$$

2) $\widehat{a} + \widehat{d} = \widehat{0}$, deci $\widehat{d} = -\widehat{a}$ şi $\widehat{a}^2 + \widehat{b} \cdot \widehat{c} = \widehat{1}$.

Dacă $\widehat{b} \neq \widehat{0}$ atunci $\widehat{c} = (\widehat{1} - \widehat{a}^2)\widehat{b}^{-1}$ şi obţinem matricele

$$A_3 = \begin{pmatrix} \widehat{a} & \widehat{b} \\ \widehat{c} & \widehat{p-a} \end{pmatrix},\ \widehat{a} \in \mathbb{Z}_p,\ \widehat{b} \neq \widehat{0}$$

în număr de $p(p-1)$.

Dacă $\widehat{b} = \widehat{0}$ atunci $\widehat{a}^2 = \widehat{1}$ deci $\widehat{a} = \widehat{1}$ sau $\widehat{a} = \widehat{p-1}$ şi obţinem matricele

$$A_4 = \begin{pmatrix} \widehat{1} & \widehat{0} \\ \widehat{c} & \widehat{p-1} \end{pmatrix},\ \widehat{c} \in \mathbb{Z}_p \quad \text{şi} \quad A_5 = \begin{pmatrix} \widehat{p-1} & \widehat{0} \\ \widehat{c} & \widehat{1} \end{pmatrix},\ c \in \mathbb{Z}_p$$

în număr de $p + p = 2p$.

În total avem $2 + p(p-1) + 2p = p^2 + p + 2$ matrice pentru $p \neq 2$ (căci $\widehat{p-1} \neq \widehat{1}$).

În cazul $p = 2$ avem matricele

$$A_1 = A_2 = \begin{pmatrix} \widehat{1} & \widehat{0} \\ \widehat{0} & \widehat{1} \end{pmatrix},\ A_3 :\ \begin{pmatrix} \widehat{0} & \widehat{1} \\ \widehat{1} & \widehat{0} \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} \widehat{1} & \widehat{1} \\ \widehat{0} & \widehat{1} \end{pmatrix},\ A_4 = \begin{pmatrix} \widehat{1} & \widehat{0} \\ \widehat{1} & \widehat{1} \end{pmatrix},$$

în total patru matrice.

3. Să se determine funcţiile continue $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$ care verifică relaţia:

$$(1+x^2)f(x^2) = f(x),\ \forall\ x \in (-1,1).$$

Vasile Pop

Soluţie. Înmulţim relaţia dată cu $1-x^2$ şi obţinem:

$$(1-x^4)f(x^2) = (1-x^2)f(x),\ \forall\ x \in (-1,1).$$

Facem substituţia $g(x) = (1-x^2)f(x)$, $x \in (-1,1)$ şi pentru funcţia continuă $g : (-1,1) \to \mathbb{R}$ obţinem:

$$g(x^2) = g(x),\ \forall\ x \in (-1,1)$$

şi prin inducţie

$$g(x^{2^n}) = g(x),\ \forall\ x \in (-1,1). \tag{1}$$

Trecând la limită în relaţia (1) $n \to \infty$ obţinem:

$$g(x) = g(0) = a,\ \forall\ x \in (-1,1)$$

şi revenind la f obţinem

$$f(x) = \frac{a}{1-x^2},\ \forall\ x \in (-1,1),$$

unde $a \in \mathbb{R}$ este o constantă arbitrară.

4.a). Fie A o mulţime cu cel puţin două elemente şi $* : A \times A \to A$ o lege de compoziţie asociativă şi comutativă.

Să se arate că dacă ecuaţia $a * x = b$ are soluţie $x \in A$ pentru orice $a, b \in A$, atunci funcţia

$$f_c : A \to A, \quad f_c(x) = c * x, \quad x \in A$$

este injectivă pentru orice $c \in A$.

b). Fie $g : A \to A$ o funcţie bijectivă cu proprietatea că $g(x) \neq x$ pentru orice $x \in A$ şi legea de compoziţie

$$\text{“}\circ\text{”} : A \times A \to A, \quad x \circ y = g(y) \quad (x, y \in A).$$

Să se arate că legea "$\circ$" nu este asociativă şi nu este comutativă, că ecuaţia $a \circ x = b$ are soluţie $x \in A$ pentru orice $a, b \in A$ şi că pentru orice $c \in A$ funcţia

$$g_c : A \to A, \quad g_c(x) = c \circ x, \quad x \in A$$

este injectivă.

Vasile Pop

Soluţie. a) Fie $x, y \in A$ astfel ca

$$f_c(x) = f_c(y) \Leftrightarrow c * x = c * y. \tag{1}$$

Din ipoteză pentru $a = b = x$ există $x' \in A$ astfel ca $x = x' * x$ şi apoi pentru $a = c$ şi $b = x'$ există $z \in A$ astfel ca $c * z = x'$. Avem succesiv:

$$x = x' * x = c * z * x = c * x * z \overset{(1)}{=} c * y * z = y * c * z = y * x' \tag{2}$$

Analog dacă definim $y' \in A$ astfel ca $y = y' * y$ atunci obţinem

$$y = x * y' \tag{3}$$

Acum din (2) şi (3) avem:

$$x = y * x' \overset{(3)}{=} x * y' * x' = x * x' * y' \overset{(2)}{=} x * y' \overset{(3)}{=\!=} y,$$

astfel că funcţia f_c este injectivă.

b) Necomutativă: dacă $x \neq y$ atunci $g\left(x\right) \neq g\left(y\right)$ din injectivitatea funcţiei g, deci $x \circ y = g\left(y\right) \neq g\left(x\right) = y \circ x$.

Neasociativă: $(x \circ y) \circ z = g\left(y\right) \circ z = g\left(z\right)$ şi
$x\left(y \circ z\right) = x \circ g\left(z\right) = g\left(g\left(z\right)\right) \neq g\left(z\right)$ (căci $g\left(u\right) \neq u$).
Ecuaţia $a \circ x = b \Leftrightarrow g\left(x\right) = b$ are soluţia unică $x = g^{-1}\left(b\right)$ pentru orice $a, b \in A$.
Injectivitatea funcţiei f_c: $f_c\left(x\right) = f_c\left(y\right) \Leftrightarrow c \circ x = c \circ y \Leftrightarrow g\left(x\right) = g\left(y\right) \overset{g\,inj}{\Leftrightarrow} x = y$.