Concursul Interjudeţean de Matematică
"Argument"
Colegiul Naţional "Gheorghe Şincai", Baia Mare
Ediţia a IV-a, 2012
Clasa a IX-a

1. Pentru fiecare număr $a \in (0,1)$ definim

$$x_1 = \{2a\},\ x_2 = \{2x_1\},\ x_3 = \{2x_2\}, \ldots,\ x_9 = \{2x_8\},$$

unde am notat cu $\{x\}$ partea zecimală (fracţionară) a numărului x.

Să se determine valorile lui a pentru care $x_1 + x_2 + \ldots + x_9 = 1022a$.

Cristinel Mortici

Soluţie. Deoarece $nx - n\{x\} = n[x] \in \mathbb{Z}$, rezultă $\{nx\} = n\{x\}$, pentru orice $n \in \mathbb{Z}$ şi orice $x \in \mathbb{R}$.
Astfel că avem $x_1 = \{2a\}$, $x_2 = \{4a\}$, $x_3 = \{8a\}, \ldots$, $x_9 = \{2^9 a\}$ şi relaţia dată se scrie:

$$\{2a\} + \{4a\} + \{8a\} + \ldots + \{2^9 a\} = 1022a \Leftrightarrow$$

$$2a - [2a] + 4a - [4a] + 8a - [8a] + \ldots + 2^9 a - [2^9 a] = 1022a \Leftrightarrow$$

$$(2 + 4 + 8 + \ldots + 2^9)a - [2a] - [4a] - [8a] - \ldots - [2^9 a] = 1022a \qquad (*)$$

Notând cu $S = 2+4+8+\ldots+2^9$, avem $2S = 4+8+\ldots+2^9+2^{10}$ şi $2S-S = 2^{10}-2$, deci $S = 1022$ şi atunci relaţia $(*)$ devine:

$$[2a] + [4a] + [8a] + \ldots + [2^9 a] = 0$$

şi cum $a > 0$ rezultă

$$[2a] = [4a] = [8a] = \ldots = [2^9 a] = 0 \Leftrightarrow 2^9 a < 1 \Leftrightarrow a < \frac{1}{2^9}.$$

În concluzie valorile căutate sunt $a \in \left(0, \frac{1}{512}\right)$.

2. Pentru fiecare pereche de numere reale (x, y) notăm cu $M(x, y)$ cel mai mare dintre numerele $2x^2 - 3y$ şi $2y^2 - 3x$ şi cu $m(x, y)$ cel mai mic dintre numerele $2x - 3y^2$ şi $2y - 3x^2$.

a) Să se determine cea mai mică valoare a lui $M(x, x)$.

b) Să se determine cea mai mică valoare a lui $M(x, y)$ şi cea mai mare valoare a lui $m(x, y)$.

Vasile Pop

Soluţie.

a) $M(x, x) = 2x^2 - 3x \leq -\frac{9}{8}$

b) Avem $M(x, y) \geq 2x^2 - 3y$ şi $M(x, y) \geq 2y^2 - 3x$

şi prin adunare rezultă

$$2M(x, y) \geq 2x^2 - 3y + 2y^2 - 3x = 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + 2\left(y - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{4},$$

deci

$$M(x, y) \geq \left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{8} \geq -\frac{9}{8},$$

cu egalitate în $x = \dfrac{3}{4}$, $y = \dfrac{3}{4}$. În concluzie valoarea minimă este cel puţin $-\dfrac{9}{8}$, iar pentru $x = y = \dfrac{3}{4}$ obţinem $2x^2 - 3y = 2y^2 - 3x = -\dfrac{9}{8}$, deci $-\dfrac{9}{8}$ este valoarea minimă atinsă.

b) Avem $m(x, y) \leq 2x - 3y^2$, $m(x, y) \leq 2y - 3x^2$, deci

$$2m(x, y) \leq 2x - 3y^2 + 2y - 3x^2 = -3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - 3\left(y - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} \leq \frac{2}{3}.$$

Rezultă $m(x, y) \leq \dfrac{1}{3}$ şi valoarea maximă ar putea fi $\dfrac{1}{3}$ pentru $x = y = \dfrac{1}{3}$. Se verifică uşor că pentru $x = y = \dfrac{1}{3}$ cele două numere $2x - 3y^2$ şi $2y - 3x^2$ sunt egale cu $\dfrac{1}{3}$ deci valoarea maximă a lui m este $\dfrac{1}{3}$.

3. Pornind de la funcţia de gradul al II-lea cu coeficienţi reali $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, se construieşte un şir de funcţii aplicând în orice ordine şi de oricâte ori următoarele operaţii:

1) se înlocuieşte x cu $px + q$, cu p, q numere reale arbitrare (nu neapărat aceleaşi la fiecare transformare);

2) se schimbă între ele a cu c.

a) Explicaţi cum se poate ajunge de la funcţia $x^2 - 3x + 1$ la funcţia $-x^2 - 2x + 4$

b) Decideţi dacă pornind de la funcţia $x^2 - 3x + 1$ se poate ajunge la funcţia $2x^2 + x + 1$.

Maria Pop

Soluţie.

a) Înlocuim x cu $2x + 1$ şi obţinem funcţia $4x^2 - 2x - 1$. Schimbăm între ele -1 cu 4. Obţinem $-x^2 - 2x + 4$.

b) Vom urmări cum se schimbă discriminantul polinomului după aplicarea uneia din transformările a) sau b). După efectuarea transformării a), din

$$f = ax^2 + bx + c$$

obţinem

$$g = a(px + q)^2 + b(px + q) + c = ap^2x^2 + (2apq + bp)x + aq^2 + bq + c,$$

deci

$$\Delta_f = b^2 - 4ac$$

şi

$$\begin{aligned}\Delta_g &= p^2(2aq + b)^2 - 4ap^2(aq^2 + 4q + c)\\ &= p^2(4a^2q^2 + 4abq + b^2 - 4a^2q^2 - 4abq - 4ac) = p^2(b^2 - 4ac) = p^2 \cdot \Delta_f.\end{aligned}$$

După efectuarea transformării b), din $f = ax^2 + bx + c$ se obţine

$$g = cx^2 + bx + a \text{ şi } \Delta_f = \Delta_g = b^2 - 4ac.$$

Astfel că dacă pornim de la un polinom cu discriminantul Δ după un număr de tranformări obţinem un polinom cu discriminantul

$$\Delta_1 = p_1^2 \cdot p_2^2 \ldots p_k^2 \cdot \Delta = p^2 \cdot \Delta.$$

În cazul nostru $f = x^2 - 3x + 1$, $\Delta_f = 9 - 4 = 5 > 0$ şi $g = 2x^2 + x + 1$ cu $\Delta_g = 1 - 8 = -7 < 0$. Nu putem avea $\Delta_g = p^2 \cdot \Delta_f$, deci nu putem ajunge de la f la g.

Observaţie. Dacă de la un polinom de grad II se ajunge tot la un polinom de grad II, toate polinoamele din şir sunt de grad II ($a_n \neq 0$, $c_n \neq 0$).

Concursul Interjudeţean de Matematică
"Argument"
Colegiul Naţional "Gheorghe Şincai", Baia Mare
Ediţia a IV-a, 2012
Clasa a X-a

1. Să se demonstreze inegalităţile:
a) $\sqrt{2}(x+y+z) \leq \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{y^2+z^2} + \sqrt{z^2+x^2}$, $\forall\ x,y,z \in \mathbb{R}$
b) $(10x_1x_2 + x_1y_2 + x_2y_1 + 5y_1y_2)^2 \leq (10x_1^2 + 2x_1y_1 + 5y_1^2)(10x_2^2 + 2x_2y_2 + 5y_2^2)$, $\forall\ x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$.

Maria Pop

Soluţie. a) Considerăm în planul Oxy vectorii:

$$\overline{v}_1 = x\overline{i} + y\overline{j}, \quad \overline{v}_2 = y\overline{i} + z\overline{j}, \quad \overline{v}_3 = z\overline{i} + x\overline{j}$$

şi din inegalitatea triunghiului avem

$$\|\overline{v}_1 + \overline{v}_2 + \overline{v}_3\| \leq \|\overline{v}_1\| + \|\overline{v}_2\| + \|\overline{v}_3\|.$$

Avem:

$$\|\overline{v}_1 + \overline{v}_2 + \overline{v}_3\| = \|(x+y+z)(\overline{i} + \overline{j})\| = |x+y+z|\sqrt{2}$$
$$\|\overline{v}_1\| = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \|\overline{v}_2\| = \sqrt{y^2+z^2}, \quad \|\overline{v}_3\| = \sqrt{z^2+x^2}.$$

b) Considerăm vectorii

$$\overline{v}_1 = (3x_1+y_1)\overline{i} + (x_1-2y_1)\overline{j}, \quad \overline{v}_2 = (3x_2+y_2)\overline{i} + (x_2-2y_2)\overline{j}$$

din inegalitatea Cauchy-Schwarz:

$$(\overline{v}_1 \cdot \overline{v}_2)^2 \leq \|\overline{v}_1\|^2 \cdot \|\overline{v}_2\|^2,$$

avem:

$$\overline{v}_1 \cdot \overline{v}_2 = (3x_1+y_1)(3x_2+y_2) + (x_1-2y_1)(x_2-2y_2) = 10x_1x_2 + x_1y_2 + x_2y_1 + 5y_1y_2$$
$$\|\overline{v}_1\|^2 = \overline{v}_1 \cdot \overline{v}_1 = (3x_1+y_1)^2 + (x_1-2y_1)^2 = 10x_1^2 + 2x_1y_1 + 5y_1^2$$
$$\|\overline{v}_2\|^2 = 10x_2^2 + 2x_2y_2 + 5y_2^2.$$

2. Fie $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ două funcţii care verifică relaţia:

$$f(x + g(y)) = 2x + y + 3,\ \forall\ x, y \in \mathbb{R}. \qquad (1)$$

a) Să se arate că există o infinitate de perechi de funcţii (f, g) care verifică (1).
b) Să se determine $g(x + f(y))$. (1)

Să se determine $g(x + f(y))$.

Vasile Pop

Soluţie. a) Căutăm funcţii de forma $f(x) = ax + b,\quad g(x) = cx + d$ şi din (1) deducem $a = 1,\quad c = \frac{1}{2},$ şi $b + d = 3$. Luăm $f(x) = 2x + b,\quad g(x) = \frac{1}{2}x + 3 - b,$ $x \in \mathbb{R},\quad b \in \mathbb{R}.$

b) Punem în (1) $y = 0$ şi obţinem:

$$f(x + g(0)) = 2x + 3 = 2(x + g(0)) - 2g(0) + 3,\ \forall\ x \in \mathbb{R},$$

deci $f(x) = 2x + a,\ \forall\ x \in \mathbb{R},\ (a = -2g(0) + 3)$.

Revenind cu f în (1) obţinem:

$$2(x + g(y)) + a = 2x + y + 3,\ \forall\ x, y \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$2g(y) + a = y + 3,\ \forall\ y \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$g(y) = \frac{1}{2}y + b,\ \forall\ y \in \mathbb{R},\ \left(b = \frac{3 - a}{2}\right).$$

Revenind cu f şi g în (1) obţinem:

$$2\left(x + \frac{1}{2}y + b\right) + a = 2x + y + 3,\ \forall\ x, y \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$2b + a = 3.(2)$$

Avem

$$g(x + f(y)) = \frac{1}{2}(x + 2y + a) + b = \frac{1}{2}x + y + \frac{a + 2b}{2} \overset{(2)}{=} \frac{1}{2}x + y + \frac{3}{2}.$$

În concluzie

$$g(x + f(y)) = \frac{1}{2}x + y + \frac{3}{2},\ \forall\ x, y \in \mathbb{R}.$$

3. Fie x un număr real cu proprietatea că numerele $\sin 5x$, $\sin 6x$ şi $\sin 11x$ sunt numere raţionale nenule. Să se arate că $\sin 16x$ este număr raţional.

Maria Pop

Soluţie. Avem

$$\sin 11x + \sin 5x = 2 \sin 8x \cos 3x$$

$$\sin 11x - \sin 5x = 2 \sin 3x \cos 8x$$

Prin înmulţire rezultă

$$\sin^2 11x - \sin^2 5x = \sin 6x \sin 16x.$$

Cum $\sin 6x \neq 0$ atunci

$$\sin 16x = \frac{\sin^2 11x - \sin^2 5x}{\sin 6x} \in \mathbb{Q}.$$

Concursul Interjudeţean de Matematică
"Argument"
Colegiul Naţional "Gheorghe Şincai", Baia Mare
Ediţia a IV-a, 2012
Clasa a XI-a

1. Fie $SL_2(\mathbb{Z}) = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}) \mid \det X = 1\}$.
a) Să se arate că ecuaţia $X^2 + X^{-2} = I_2$ nu are soluţii în $SL_2(\mathbb{Z})$,
b) Să se arate că ecuaţia $X^2 + X^{-2} = -I_2$ are soluţii şi să se determine mulţimea

$$\{X^n + X^{-n} \mid X^2 + X^{-2} = -I_2,\ n \in \mathbb{N}^*\}.$$

Vasile Pop

Soluţie. Dacă t este urma matricei X atunci X verifică relaţia:

$$X^2 - tX + I_2 = 0 \Leftrightarrow X + X^{-1} = t \cdot I_2 \Rightarrow X^2 + X^{-2} + 2I_2 = t^2 I_2 \Leftrightarrow$$

$$X^2 + X^{-2} = (t^2 - 2)I_2.$$

a) $X^2 + X^{-2} = I_2 \Leftrightarrow t^2 - 2 = 1 \Leftrightarrow t^2 = 3 \Leftrightarrow t \in \pm\sqrt{3}$, deci $t \notin \mathbb{Z}$ (fals).
b) $X^2 + X^{-2} = -I_2 \Leftrightarrow t^2 - 2 = -1 \Leftrightarrow t^2 = 1 \Leftrightarrow t \in \{-1, 1\}$.
Un exemplu este

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},\ X^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix},\ X^{-2} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pentru $t = 1$ din relaţia $X^2 - X + I_2 = 0$ prin înmulţire cu $X + I_2$ rezultă $X^3 + I_2 = 0$, deci $X^3 = -I_2$.

Pentru $t = -1$ din relaţia $X^2 + X + I_2 = 0$ prin înmulţire cu $X - I_2$ rezultă $X^3 - I_2 = 0$, deci $X^3 = I_2$.

În cazul $t = -1$ şirul de matrice $Y_n = X^n + X^{-n}$ este periodic de perioadă 3 cu primii termeni $Y_1 = -I_2$, $Y_2 = -I_2$, $Y_3 = X^3 + X^{-3} = I_2 + I_2 = 2I_2$ şi mulţimea căutată este $\{-I_2, 2I_2\}$.

În cazul $t = 1$ şirul de matrice Y_n este periodic de perioadă 6 şi primii termeni sunt $Y_1 = I_2$, $Y_2 = -I_2$, $Y_3 = -2I_2$, $Y_4 = X^4 + X^{-4} = -X - X^{-1} = -Y_1 = -I_2$, $Y_5 = I_2$, $Y_6 = 2I_2$. Mulţimea căutată este $\{-I_2, I_2, -2I_2, 2I_2\}$.

2. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Să se arate că:
a) Dacă $\mathrm{Tr}\,(A \cdot A^t) = 0$, atunci $A = 0$.
b) Dacă $A \cdot A^t = -A^2$, atunci $A^t = -A$.
(Tr(B) este suma elementelor de pe diagonala matricei B)

Vasile Pop

Soluţie. a) $A \cdot A^t = B = [b_{ij}]_{i,j=\overline{1,n}}$

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot a_{jk}, \quad \mathrm{Tr}\,(B) = \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2$$

$$\mathrm{Tr}\,(B) = 0 \Rightarrow a_{ik} = 0,\ i = \overline{1,n},\ k = \overline{1,n} \Rightarrow A = 0.$$

b) Fie $D = A + A^t$, $D \cdot D^t = (A + A^t)^2 = A^2 + A \cdot A^t + A^t \cdot A + (A^t)^2 = A^t \cdot A + (A^t)^2$. Dar

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{Tr}\,(A^t \cdot A) = \mathrm{Tr}\,(A \cdot A^t) = -\mathrm{Tr}\,A^2 \\ \mathrm{Tr}\,(A^t)^2 = \mathrm{Tr}\,(A^2)^t = \mathrm{Tr}\,A^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{Tr}\,(D \cdot D^t) = 0 \Rightarrow D = 0.$$

Observaţie. Din $A^2 \cdot A^t = -A^3$ nu rezultă $A^t = -A$ după cum se vede din exemplul

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. Se consideră şirul $(S_n)_{n\geq 1}$, unde $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$, $n \geq 1$.

a) Să se arate că şirul este nemărginit şi pentru $n \geq 2$, S_n nu este număr întreg.

b) Să se arate că există $N \in \mathbb{N}^*$ astfel ca primele patru zecimale ale numărului S_N să fie 2012.

Vasile Pop

Soluţie.

a1) Şirul $(S_n)_{n\geq 1}$ este evident crescător şi

$$\begin{aligned} S_{2^n} &= 1 + \frac{1}{2} + \big(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\big) + \big(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\big) + \\ &\quad + \cdots + \big(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \frac{1}{2^{n-1}+2} + \cdots + \frac{1}{2^n}\big) > \\ &> 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} + \cdots + \frac{2^{n-1}}{2^n} = 1 + (n-1)\frac{1}{2} = \frac{n+1}{2}. \end{aligned}$$

a2) Dacă $n \in [2^k, 2^{k+1})$, $k \in \mathbb{N}^*$, atunci dintre numerele $1, 2, \ldots, n$ singurul număr care se divide cu 2^k este chiar 2^k, astfel că dacă suma S_n se aduce la numitor comun $S_n = \frac{p_n}{q_n}$ atunci q_n este de forma $q_n = 2^k \cdot Q$ unde Q este impar. Toate fracţiile din suma $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^k} + \cdots + \frac{1}{n}$ se amplifică cu numere pare, înafară de fracţia $\frac{1}{2^k}$, care se amplifică cu Q, astfel ca p_n este număr impar (Q + număr par) şi q_n este număr par, deci fracţia $S_n = \frac{p_n}{q_n}$ nu este număr întreg.

b) Arătăm că există N astfel ca partea zecimală a numărului S_N să fie cuprinsă în intervalul $I = [0,2012,\ 0,2013)$. Pentru $n > 10000$ avem $\frac{1}{n} < 0,0001$ (lungimea intervalului I). Fie $S_{10000} = k + \varepsilon$, unde $k \in \mathbb{N}$ şi $\varepsilon \in [0, 1)$.

Dacă $\varepsilon \in I$, atunci luăm $N = 10000$.

Dacă $\varepsilon < 0,2012$, deoarece $(S_n)_n$ este nemărginit şi pentru $n > 10000$ fiecare fracţie $\frac{1}{n}$ este mai mică decât lungimea intervalului I, putem adăuga un număr minim de fracţii astfel ca să ajungem la S_N cu $S_N - k \in I$.

Dacă $\varepsilon > 0,2013$ alegem N minim astfel ca $S_N > k + 1 + 0,2012$ (şi $S_N < k + 1 + 0,2013$).

Observaţie: Şirul $(\{S_n\})_{n\geq 1}$ este dens în $[0, 1]$.

Concursul Interjudeţean de Matematică
"Argument"
Colegiul Naţional "Gheorghe Şincai", Baia Mare
Ediţia a IV-a, 2012
Clasa a XII-a

1. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ şi $b_1, b_2, \ldots, b_n$ numere reale distincte şi considerăm matricele coloană

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^n \end{bmatrix}^t, \ldots, A_n = \begin{bmatrix} 1 & a_n & a_n^2 & \ldots & a_n^n \end{bmatrix}^t;$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & b_1 & b_1^2 & \ldots & b_1^n \end{bmatrix}^t, \ldots, B_n = \begin{bmatrix} 1 & b_n & b_n^2 & \ldots & b_n^n \end{bmatrix}^t.$$

Să se arate că dacă $\det \begin{bmatrix} A_1, A_2, \ldots, A_n, B_i - B_j \end{bmatrix} = 0,\ \forall\ i, j = \overline{1, n}$ atunci

$$\det \begin{bmatrix} B_1, B_2, \ldots, B_n, A_i - A_j \end{bmatrix} = 0,\ \forall\ i, j = \overline{1, n}$$

(am notat cu $\begin{bmatrix} A_1, A_2, \ldots, A_n, B_i - B_j \end{bmatrix}$ matricea pătratică de ordin $n+1$ cu coloanele $A_1, A_2, \ldots, A_n$ şi $B_i - B_j$).

Vasile Pop

Soluţie. Avem:

$$\det \begin{bmatrix} A_1, A_2, \ldots, A_n, B_i - B_j \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\det \begin{bmatrix} A_1, A_2, \ldots, A_n, B_i \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} A_1, A_2, \ldots, A_n, B_j \end{bmatrix}.$$

Determinantul $f_A(x) = \det \begin{bmatrix} A_1, A_2, \ldots, A_n, X \end{bmatrix}$ în care ultima coloană este

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & \ldots & x^n \end{bmatrix}^t$$

este un determinant Vandermonde de dimensiune $n+1$ şi atunci

$$f_A(x) = (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n) V(a),$$

unde cu $V(a)$ am notat determinantul Vandermonde de dimensiune n:

$$V(a) = V(a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

Din condiţia dată rezultă

$$f_A(b_1) = f_A(b_2) = \ldots = f_A(b_n) \Leftrightarrow P_A(b_1) = P_A(b_2) = \ldots = P_A(b_n)$$

unde $P_A(x) = (x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)$.

Definim analog

$$f_B(x) = \det[B_1, B_2, \dots, B_n, X] = (x-b_1)(x-b_2)\dots(x-b_n)V(b) = P_B(x)V(b)$$

şi considerăm polinomul

$$f(x) = P_A(x) - P_B(x) = (x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n) - (x-b_1)(x-b_2)\dots(x-b_n),$$

care este un polinom de grad cel mult $n-1$.

Din condiţiile date $f(b_1) = f(b_2) = \dots = f(b_n)$ deci f este un polinom constant şi atunci

$$f(a_1) = f(a_2) = \dots = f(a_n) \Leftrightarrow$$

$$P_B(a_1) = P_B(a_2) = \dots = P_b(a_n) \Leftrightarrow f_B(a_1) = f_B(a_2) = \dots = f_B(a_n) \Leftrightarrow$$

$$\det\left[\ B_1, B_2, \dots, B_n, A_i\ \right] = \det\left[\ B_1, B_2, \dots, B_n, A_j\ \right],\ \forall\ i, j = \overline{1, n} \Leftrightarrow$$

$$\det\left[\ B_1, B_2, \dots, B_n, A_i - A_j\ \right] = 0,\ \forall\ i, j = \overline{1, n}.$$

2. Să se decidă dacă există funcţii $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu primitivă $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ care să verifice una din condiţiile:

a) $F(f(x))=2x^2,\ \forall\, x\in\mathbb{R}$;

b) $F(f(x))=3x^3,\ \forall\, x\in\mathbb{R}$.

Vasile Pop

Soluţie. a) Există. Căutăm f de forma $f(x)=ax$ şi atunci

$$F(x)=\frac{ax^2}{2},\quad F(f(x))=\frac{a}{2}(ax)^2=\frac{a^3}{2}x^2,\ \forall\, x\in\mathbb{R}.$$

Punem condiţia $a^3=4$ şi obţinem

$$f(x)=\sqrt[3]{4}\cdot x,\ \forall\, x\in\mathbb{R}.$$

b) Arătăm că nu există. Dacă prin absurd ar exista f atunci din $F\circ f=g$, cu $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=3x^3$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$, deoarece funcţia g este bijectivă rezultă că F este surjectivă şi f este injectivă.

Acum vom folosi câteva proprietăţi uşor de demonstrat (leme).

L1. O funcţie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ injectivă, cu proprietatea lui Darboux este strict monotonă.

L2. O funcţie monotonă, discontinuă are doar discontinuităţi de speţa I.

L3. O funcţie discontinuă, cu proprietatea lui Darboux are numai discontinuităţi de speţa II.

L4. O funcţie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ monotonă, cu proprietatea lui Darboux este continuă.

L5 (L1+L2). O funcţie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ injectivă şi cu proprietatea lui Darboux este funcţie continuă.

Revenind la problemă, funcţia f fiind o derivată ($f=F'$) ea are proprietatea lui Darboux şi fiind injectivă, din L5 şi L1 rezultă că f este continuă şi strict monotonă.

Arătăm că f este şi surjectivă, pentru care datorită proprietăţii lui Darboux este suficient să arătăm că

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty \quad \text{şi} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$$

sau invers.

În ipoteza că f este strict crescătoare, fie $(x_n)_n$ un şir crescător cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty$ şi presupunem că şirul crescător $(f(x_n))_n$ este mărginit:

$$m\le f(x_n)\le M,\ \forall\, n\in\mathbb{N}.$$

Avem $F(f(x_n))\in[a,b]$ unde $[a,b]=F([m,M])$, deci şirul $(3x_n^3)_n$ este mărginit (fals).

Analog $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ şi f este bijectivă.

Din $F \circ f = g$ rezultă $F = g \circ f^{-1}$ iar funcţia $g \circ f^{-1}$ este strict monotonă şi bijectivă, deci F este strict monotonă şi atunci derivata sa $F' = f$ are semn constant (contrazice surjectivitatea funcţiei f).

3. a) Fie E o mulţime nevidă, M mulţimea funcţiilor $f : E \to E$ şi $f \in M$. Demonstraţi că dacă f este surjectivă dar neinjectivă, atunci există cel puţin două funcţii $f_1, f_2 : E \to E$ astfel încât $f \circ f_1 = f \circ f_2 = 1_E$.

b) Daţi exemplu de mulţime infinită E şi $f : E \to E$ pentru care există exact două funcţii $f_1, f_2 : E \to E$ astfel încât $f \circ f_1 = f \circ f_2 = 1_E$.

Dorel Miheţ, Timişoara

Soluţie Proprietatea de la a) este cunoscută. Pentru demonstraţie remarcăm că deoarece pentru orice $t \in E$ există $x \in E$ astfel încât $f(x) = t$, mulţimea $f^{-1}(\{t\}) \neq \emptyset$, iar dacă $t_1 \neq t_2$, atunci $f^{-1}(\{t_1\}) \cap f^{-1}(\{t_2\}) = \emptyset$. În fiecare mulţime $f^{-1}(\{t\})$ alegem câte un x_t şi definim aplicaţia $h : E \to E$ punând $h(t) = x_t$. Aceasta satisface egalitatea $f \circ h = 1_E$. În plus deoarece f nu este injectivă, există cel puţin două elemente $x, y \in E$ cu $x \neq y$ şi $f(x) = f(y)$, iar din modul de definire a funcţiei h găsim cel puţin două funcţii f_1, f_2 ca în enunţ.

b) Fie $A = \{1, 2\}$ şi $E = \{(x_1, x_2, ..., x_n, ...) \mid x_i \in A\}$. În monoidul $(M, \circ)$ considerăm funcţiile f, f_1, f_2, definite prin:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n, ...) = (x_2, x_3, ...x_n, ...)$$

$$f_1(x_1, x_2, ..., x_n, ...) = (1, x_1, x_2, ..., x_n, ...)$$

$$f_2(x_1, x_2, ..., x_n, ...) = (2, x_1, x_2, ..., x_n, ...).$$

Se verifică imediat că $f \circ f_r = 1_E \quad (r = 1, 2)$.

Funcţia f nu mai are alte simetrice la dreapta, deoarece dacă $g \in M$, $g(x_1, x_2, ..., x_n, ...) = (y_1, y_2, ..., y_n, ...)$ este astfel încât $f \circ g(x_1, x_2, ..., x_n, ...) = (x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ atunci $(y_2, y_3, ..., y_n, ...) = (x_1, x_2, ..., x_n, ...)$, deci

$$y_2 = x_1,\ y_3 = x_2, ...,\ y_n = x_{n-1}, ...$$

Prin urmare f_1 şi f_2 sunt singurele inverse la dreapta pentru f.