COLEGIUL NAȚIONAL
GHEORGHE ȘINCAI
BAIA MARE

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE
ȘI CERCETĂRII ȘTIINȚIFICE

CONCURSUL „ARGUMENT”

12 noiembrie 2016

CLASA a VI-a

La problemele 1 – 10 se scriu pe foaia de concurs doar literele corespunzătoare răspunsului considerat corect. Fiecare problemă are un singur răspuns corect.

(5p) **1.** Dacă $a\cdot b=720$ iar $[a,b]=60$, atunci $a+b$ este:

a) 64 b) 42 c) 120 d) 72

(5p) **2.** Cel mai mic număr natural care împărţit pe rând la 6, 7 şi 8 dă resturile 5, 6 respectiv 7 este:

a) 187 b) 167 c) 567 d) 100

(5p) **3.** Soluţia ecuaţiei $5+5\cdot 6+5\cdot 6^2+\cdots+5\cdot 6^{2016}=x^{2017}-1$ este :

a) 6 b) 4 c) 5 d) 7

(5p) **4.** Dacă a şi b sunt cifre nenule şi $\underbrace{\overline{aa\cdots a}}_{2016}\cdot 5=\underbrace{\overline{bb\cdots b}}_{2016}\cdot 4$, atunci $4a+5b$ este:

a) 54 b) 37 c) 41 d) 40

(5p) **5.** Dacă a,b,c sunt cele mai mici numere naturale consecutive, două câte două prime între ele, cu suma divizibilă cu 15, atunci $a\cdot b\cdot c$ este:

a) 4450 b) 990 c) 150 d) 30

(5p) **6.** Dacă $AB=100cm$, $[CD]\subset[AB]$ astfel încât segmentele $[AB]$ şi $[CD]$ au acelaşi mijloc, iar $AC=80cm$, atunci lungimea segmentului $[CD]$ este:

a) 20 cm b) 80 cm c) 60 cm d) 40 cm

(5p) **7.** Dacă $a,b,c\in\{1,2,3,\cdots 59\}$ şi $a^\circ b'c''+b^\circ a'c''$ este un număr natural în grade, atunci $a+b+c$ este:

a) 80 b) 89 c) 98 d) 59

(5p) **8.** În jurul punctului O se consideră, în această ordine, semidreptele $[OA_1, [OA_2, \cdots, [OA_n, \cdots,$ $n\in\mathbb{N}^*$ cu $m(\sphericalangle(A_1OA_2))=2^\circ$, $m(\sphericalangle(A_2OA_3))=2\cdot m(\sphericalangle(A_1OA_2))$, $m(\sphericalangle(A_3OA_4))=2\cdot m(\sphericalangle(A_2OA_3)),\cdots$ şi aşa mai departe.

Mulţimea valorilor lui $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$ pentru care $[OA_n=[OA_1$ este:

a) $\varnothing$ b) $\{6,7\}$ c) $\{7\}$ d) $\{6\}$

La următoarele probleme se cer soluţiile complete, care se trec pe foaia de concurs.

9. Se consideră fracţia $A_n=\dfrac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)+1}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)\cdot(2n+2)+1}$, $n\in\mathbb{N}^*$.

(15p) a) Arătaţi că A_3 este reductibilă;

(10p) b) Arătaţi că A_{1007} este ireductibilă;

(10p) c) Arătaţi că $\dfrac{1}{2016}<A_{1007}<\dfrac{1}{2014}$.

10. Un triunghi echilateral de latură 1 poate fi acoperit cu 5 triunghiuri echilaterale de latură a.

(10p) a) Arătaţi că $a\geq\dfrac{1}{2}$;

(5p) b) Arătaţi că acelaşi triunghi poate fi acoperit cu 4 triunghiuri echilaterale de latură a.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.
Timpul de lucru este 2 ore și 30 de minute. Se acordă 10 puncte din oficiu.

SUCCES !

ROMÂNIA
Ministerul Educaţiei Naţionale şi Cercetării Ştiinţifice
Colegiul Naţional „Gheorghe Şincai”, Baia Mare

<u>CONCURSUL „ARGUMENT”</u>

12 noiembrie 2016

CLASA a VI-a

BAREM

1. $(a,b)=720:60=12 \Rightarrow a=12x,\ b=12y,\ (x,y)=1$

$720=12^2xy \Rightarrow xy=5 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=5 \end{cases} sau \begin{cases} x=5 \\ y=1 \end{cases}$

Deci $\begin{cases} a=12 \\ b=60 \end{cases}$ sau $\begin{cases} a=60 \\ b=12 \end{cases}$. Deci $a+b=72$. Răspuns: d

....

2.
$n=6c_1+5;\ n=7c_2+6;\ n=8c_3+7 \Rightarrow n+1=6(c_1+1);\ n+1=7(c_2+1);\ n+1=8(c_3+1) \Rightarrow$
$\Rightarrow n+1=[6,7,8]=168 \Rightarrow n=167$ Răspuns: b

....

3. $5+5\cdot 6+5\cdot 6^2+\cdots+5\cdot 6^{2016}=5\left(1+6+6^2+\cdots+6^{2016}\right)=6^{2017}-1$

Răspuns: a

....

4. Din $\underbrace{\overline{aa\cdots a}}_{2016}\cdot 5=\underbrace{\overline{bb\cdots b}}_{2016}\cdot 4 \Rightarrow 5a=4b \Rightarrow a=4,\ b=5,$ deci $4a+5b=41$

Răspuns: c

....

5. Din: $a=2k-1, b=2k, c=2k+1$şi $15/6k \Rightarrow 2k=5l, l\in\mathbb{N}$, deci $k=5t, t\in\mathbb{N}$.
k -minim$\Rightarrow k=5$ şi $a=9, b=10, c=11$, deci $abc=990$

Răspuns: b

....

6.
Ordinea punctelor: A-D-C-B . Deoarece $[AB]$şi $[CD]$ au acelaşi mijloc rezultă că $AD=BC=x$.
Fie $CD=y.$ Din $x+y=80$ şi $x+y+x=100 \Rightarrow x=20,\ y=60.$

Răspuns: c

....

7. $c=30,\ a+b=59 \Rightarrow a+b+c=89$ Răspuns: b

....

8. Presupunem că există $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, astfel încât $[OA_n=[OA_1$. Atunci există $k\in\mathbb{N}^*$ asfel încât $m\left(\sphericalangle\left(A_1OA_2\right)\right)+m\left(\sphericalangle\left(A_2OA_3\right)\right)+\cdots+m\left(\sphericalangle\left(A_{n-1}OA_n\right)\right)=k\cdot 360^\circ$, deci
$2+2^2+\cdots+2^{n-1}=k\cdot 360 \Rightarrow 2^n-2=k\cdot 360 \Rightarrow 2^{n-1}-1=k\cdot 180$, fals deoarece membrul stâng este impar iar membrul drept par.

Răspuns: a

....

9. a) $A_3=\frac{2\cdot4\cdot6+1}{2\cdot4\cdot6\cdot8+1}=\frac{49}{385}=\frac{7\cdot7}{5\cdot7\cdot11}=\frac{7}{55}$ care este ireductibilă

b) $A_{1007}=\frac{2\cdot4\cdot6\cdots2014+1}{2\cdot4\cdot6\cdots2014\cdot2016+1}$. Presupunem că există numărul prim $d\in\mathbb{N}$, $d\geq 2$, astfel încât $d/\left(2\cdot4\cdots2014+1\right)$ şi $d/\left(2\cdot4\cdots2014\cdot2016+1\right)$. Rezultă $d/2015$, deci $d/5\cdot13\cdot31\Rightarrow d=5$ sau $d=13$ sau $d=31$. Atunci $d/10$ sau $d/26$ sau $d/62$. În toate cele trei situaţii $d/2\cdot4\cdots2014$. Cum $d/\left(2\cdot4\cdots2014+1\right)$, rezultă $d/1$, fals.

c) Fie $a=2\cdot4\cdot\cdots2014$. Atunci:

$$\frac{a+1}{2016a+1}>\frac{1}{2016}\Leftrightarrow 2016a+2016>2016a+1 \quad (A)$$

$$\frac{a+1}{2016a+1}<\frac{1}{2014}\Leftrightarrow 2014a+2014<2016a+1\Leftrightarrow 2a>2013 \quad (A)$$

10. a) Fie A,B,C vârfurile triunghiului echilateral de latură 1 şi M,N,P mijloacele laturilor lui. Cele 6 puncte A,B,C,M,N,P sunt acoperite de 5 triunghiuri şi conform principiului cutiei, două dintre aceste puncte sunt acoperite de acelaşi triunghi de latură a. Deoarece distanţele dintre oricare din cele 6 puncte sunt cel puţin $1/2$ şi într-un triunghi echilateral de latură a, distanţa maximă între 2 puncte este a, rezultă $a\geq\frac{1}{2}$.

b) Împărţim triunghiul echilateral de latură 1 în 4 triunghiuri de latură $1/2$ (unind mijloacele) şi plasăm cele 4 triunghiuri de latură a peste fiecare.